Е. М. Левич

Исторический очерк развития методологии математики.

Иерусалим

2008

Содержание.

Введение, и оно же заключение.

Нельзя не признать, что занятия математикой – ниспосланное богами безумие человеческого духа.

А.Н. Уайтхед

Лучший метод предвидения будущего развития математических наук заключается в изучении истории и нынешнего состояния этих наук.

А. Пуанкаре

Мир всегда устроен не так, как думают люди. Это не значит, что все идеи о его устройстве заведомо ложны. Но конкретные идеи становятся ложными, когда становятся общим достоянием. Ведь только простые идеи могут объединять большие группы людей. Идеи, разделяемые всеми, почти всегда огрубляются настолько, что обращаются в полную ложь, и зачастую в крайне опасную. Как только большое количество людей начинают верить лжи, они подгоняют под нее собственное поведение, и тем самым изменяют мир. И этот мир ничем не напоминает тот, котором возникло первоначальное понимание.

У. Боннер, Э.Уггин

Перефразируя известное высказывание Аристотеля, можно утверждать, что человек всегда стремится узнать свою историю. Описание исторических событий занимает значительное место в письменной и устной культуре любой человеческой цивилизации.

Исторические исследования обычно интересны с двух точек зрения: во-первых, подбором и изложением фактов, и, во-вторых, построением смысловых линий, связывающих эти факты в определенную историческую картину. Утверждение, что исследование верно отражает историческую действительность, нельзя считать правильным. Ибо и подбор исторических фактов, и построение с их помощью единой картины, отражает, в первую очередь, либо субъективные пристрастия и намерения автора, либо общественно признанные установки, которым он следует. Указанная ситуация приводит к тому, что исторические исследования часто полны различных мифов и расхожих мнений, которые переходят из одного исследования в другое, создавая ощущение чего-то исторически достоверного.

Предлагаемое читателю исследование отражает субъективное представление автора об историческом развитии методологии математики и направлено на обоснование его взглядов. Естественно, что при таком субъективном подходе некоторые принятые в математической исторической литературе утверждения автором оспариваются и даже объявляются мифами. От читателя в этом случае не требуется согласия со взглядами автора: последний будет доволен, если, во-первых, цепочка его логических рассуждений окажется в глазах читателя непротиворечивой, и, во-вторых, обоснование его рассуждений заставит читателя задуматься и составить собственное мнение о том или ином выводе из исторических фактов.

Для того чтобы сэкономить время и усилия читателя по ознакомлению с историей методологии математики, в данном введении, которое в определенном смысле является и заключением, мы сразу сформулируем значительную часть основных результатов нашего исследования. Это позволит читателю решить, насколько его может заинтересовать дальнейшее чтение этой книги. Кроме того, книга написана модулярно, поэтому возможно начинать ее читать с любого места.

Прежде чем сформулировать вкратце основные результаты, сделаем два замечания.

Во-первых, на написание этого труда большое влияние оказали две книги: «Математика. Утрата определенности» М. Клайна и «История западной философии» Б. Рассела. М. Клайн изменил в значительной степени взгляды автора на математику в целом и на ее историю. Б. Рассел дал поучительный урок того, как важно рассматривать историческое развитие методологии математики с позиции философии. О влиянии этих замечательных ученых на автора свидетельствует и значительное количество цитат из их произведений, которые разбросаны по разным местам в тексте нашего исследования.

Во-вторых, эта книга посвящена истории методологии математики, а не истории математики. Поэтому основное внимание уделяется историческому изменению отношения к основным математическим понятиям, а также способам проведения математических рассуждений, - как со стороны математиков, так и других кругов общества. Гораздо меньшее внимание уделяется математическим теориям и математическим результатам. Аналогично, большее предпочтение мы оказываем тем ученым, которые оказали влияние на методологию математики, а не тем, которые получили выдающиеся математические результаты. Все сказанное ни в коем случае нельзя толковать как недостаточное уважение к математикам, доказавшим те или иные выдающиеся математические теоремы или создавшим богатые математические теории. Имена этих ученых не упоминаются только потому, что их достижения не оказали значительного влияния на математическую методологию.

Теперь сформулируем основные результаты книги и дадим их краткую характеристику.

Всю историю развития математической методологии автор разбивает на четыре периода; каждому периоду посвящается соответствующая часть книги.

Первый период, который протекал со времени древнейших человеческих цивилизаций до греческой интеллектуальной революции (VI-IV вв. до н.э.), характеризуется развитием методов решения количественных практических задач. Каждая человеческая цивилизация в процессе своего существования должна была решать разнообразные количественные практические задачи, связанные с повседневной жизнью. Набор методик решения этих задач получил название ***прематематики***. Таким образом, каждая человеческая цивилизация обладает прематематикой. Все методики решения практических задач, составляющие прематематику, образуются на основании практического опыта с помощью обычной индукции и применяются на основе соглашения между соответствующими группами людей. Это означает, что методика решения любой практической задачи представляет собой результат соглашения внутри некоторого человеческого сообщества.

Прематематика обычно возникает с рождением человеческой цивилизации и погибает с гибелью этих цивилизаций. Уровень развития прематематики, сложность решаемых практических задач существенно зависит от развития той цивилизации, в рамках которой она существует.

Прематематика оперирует именованными числами, которые выражают количественную сущность некоторого множества реальных объектов или степень наличия определенных свойств в реальном объекте. Эти именованные числа назовем ***прематематическими числами***. Другими словами, прематематические числа всегда получаются в результате процесса измерения, т.е. эти числа в той или иной форме являются отражением внешнего мира.

Второй период развития математической методологии, которому посвящена вторая часть книги, начался с греческой интеллектуальной революции (VI-IV вв. до н.э.), в рамках которой греки создали своеобразную троицу: греческую философию, математику и физику. Эта троица была чисто греческим созданием. Она была создана человеческим интеллектом и существует только в нем. Ни один народ, как до греков, так и после них, не создал ничего такого, что даже близко напоминало это явление. Одним из достижений греческой философии было определение понятия науки, в основе которого лежала аналогия с греческой геометрией.

В рамках интеллектуальной революции при создании философии и математики был выработан новый способ мышления — дедукция, основанная на разработанной греками логике. Это уникальное достижение позволяет проводить рассуждения по определенным правилам. Именно этот способ рассуждений лег в основу научных исследований, которые обеспечили человечеству тот технологический прогресс, свидетелями которого мы являемся. До сих пор также ни один народ не только не повторил, но и не создал ничего даже близко напоминающего это греческое изобретение.

Сразу же отметим, что греческая цивилизация обладала своей прематематикой, которая называлась ***логистикой***. Созданная греками интеллектуальная троица и, в частности, математика, никаким образом не пересекалась с логистикой.

Греческая математика представляет собой набор утверждений относительно математических объектов, которые получены с помощью дедукции. Она, по существу, состоит из трех отраслей: *геометрии, теории чисел и арифметики*. Если первые две отрасли были созданы во время интеллектуальной революции, то арифметика появилась в более поздний период. Все эти три типа математики принципиально отличались друг от друга — в отношении объектов исследования, так и методов.

Греческая геометрия является дедуктивной аксиоматической теорией, основная цель которой есть *доказательство* утверждений. Предмет изучения геометрии — свойства геометрических фигур и тел, т.е. абстрактных объектов, существующих только в сознании людей. Представление о геометрических объектах можно получить с помощью чертежей.

Греческая теория чисел представляет собой набор утверждений относительно свойств натуральных чисел. Под ***натуральными числами*** греки понимали целые положительные числа, начинающиеся с 2. Единица не считалась натуральным числом. Натуральным числам греки придавали мистическое значение. Эти числа являлись чисто абстрактными объектами, не имеющими никакого отношения к количествам реальных объектов. Поэтому в данной теории чисел нельзя встретить дробей. Утверждения не доказывались, а индуктивно проверялись, ибо не была найдена система аксиом. Некоторые утверждения дедуктивно выводились из определений.

Греческая арифметика представляет собой набор методик вычислительных задач, которые на современном языке сводятся к решению конкретных уравнений. В этом типе математики ничего не доказывается, а просто даются инструкции, как численно решить задачу. Другими словами, решить задачу – это значит найти число или группу чисел. Арифметика оперирует с конкретными числами, которые принципиально по своей сути отличаются от натуральных из теории чисел. Эти числа называются ***прагматическими числами***. Среди них можно встретить как единицу, так и дроби. Прагматические числа имеют двойственную природу. С одной стороны, они не несут никакой количественной сущности, ибо фигурируют в задачах, которые не связаны ни с какими количествами реальных объектов. С другой стороны, эти задачи часто можно легко сформулировать как праматематические задачи, и в этом случае прагматические числа выступают как часть именованных чисел.

Во второй части книги обосновываются следующие тезисы:

— греческая математика не могла возникнуть никоим образом из праматематики;

— греческая математика представляет собой вид греческого интеллектуального искусства;

— греческая математика никоим образом не связана с решением практических задач, т.е. с праматематикой; другими словами, греческая математика не являлась прикладной наукой.

С гибелью греко-римской цивилизации греческая математика превратилась в мертвую науку, погребенную в книгах. Более семи столетий весь мир, в том числе и Европа, спокойно жил без математики и совершенно не чувствовал необходимости в ней. Для решения практических количественных задач в каждой стране использовалась праматематика, которую, например, в Европе называли ***техникой счета***, или ***практической арифметикой***.

Возрождение греческой математики к жизни связано с рядом довольно случайных событий, которые растянулись на несколько веков.

Во-первых, совершенно случайно в Индии оказался грек-математик, который заинтересовал определенными математическими задачами некоторых индийцев. Так возникли несколько центров математики в Индии.

Во-вторых, арабы через индийцев познакомились с некоторыми аспектами греческой математики и стали также решать математические задачи. А затем они вдруг заинтересовались всей греческой культурой и в достаточно быстром темпе и в короткий срок перевели на арабский язык практически все научные греческие книги, которые еще сохранились после нескольких столетий их уничтожения. Трудно найти рациональное объяснение этому событию, ибо значительная часть греческих знаний не нашла своего существенного продолжения в трудах арабских ученых. Более того, ни индийцы, ни арабы не смогли овладеть дедуктивным методом. Их основная заслуга, в чем все человечество должно выразить им свою благодарность, заключается в том, что они сохранили греческое интеллектуальное наследство и передали его европейцам.

В третьих, отдельные фрагменты греческой философии довольно рано вошли в католическую теологию через труды первых христианских теологов-философов. Начиная с XI столетия в Европу стали проникать и переводиться с арабского языка труды греческих ученых. Именно это позволило в XIII веке Фоме Аквинскому ввести в католическую теологию дедуктивный метод рассуждений, почерпнутый из оригинальных трудов Аристотеля, которые появились в Европе в переводах с арабского. В частности, ему принадлежат первые *доказательства* существования Бога. С этого времени на всех богословских факультетах европейских университетов стали изучать логику Аристотеля, что подготовило почву для возвращения к жизни математики в Европе, ибо первыми математиками, которые занимались также и геометрией, в Европе были монахи. Другими словами, если мы сегодня видим в Европе и в мире живую математику, то этим мы обязаны католической церкви. ***Математика в Европе возродилась исключительно благодаря католической религии***, ибо только через изучение католической теологии можно было в то время научиться дедуктивному доказательству. Легко видеть, что народы, принадлежащие к другим религиозным конфессиям, приобщились к математике только в новейшее время без всякой связи с господствовавшими у них религиями.

В четвертых, в Европе были прочитаны «Начала» Евклида. Именно европейцы оказались единственными, которые смогли не только прочитать, но и усвоить этот труд до такой степени, что смогли *доказывать* новые теоремы. То, что эта книга смогла пережить полтора тысячелетия, представляется определенным чудом.

К XVII в. уровень развития математики в Европе достиг, по существу, уровня математики в древней Греции. Однако важно отметить, что европейцы к этому времени не создали в математике ничего такого, что выходило бы за рамки возможностей понимания греков. Другими словами, все математические достижения европейцев могли быть поняты древними греками. Возродившейся в Европе греческой математикой до XVII в. занимались либо преподаватели университетов, либо люди, свободные от «забот о хлебе насущном». Занятия математикой не имели никакой связи с практическими нуждами, которые решались в рамках прематематики. Математика в университетах преподавалась на факультете искусств. (Да и сегодня в старейших университетах Англии Кембридже и Оксфорде окончившие по курсу математики получают степень магистра искусств.)

Третий период в развитии математической методологии начался со второй интеллектуальной революции в XVII в., которая происходила в Западной Европе. Так как в этой революции участвовали представители различных европейских стран, то ее удобно назвать ***европейской интеллектуальной революцией***. Очевидно, что эта революция не могла произойти без овладения и приспособления греческого наследства к новым европейским условиям. Развитию математической методологии в третий период посвящена третья часть книги.

Как и греческая интеллектуальная революция, европейская революция также создала свою интеллектуальную троицу: ***европейскую философию*** (в этом случае мы ограничиваемся только теорией познания), ***европейскую физику*** (или естествознание) и ***европейскую математику***. Однако эта революция по-новому расставила ударения. Если греки во главу угла ставили философию, то европейцы на первое место поставили естествознание. В связи с этим изменились и цели математики. Если у греков математика была одним из видов интеллектуального искусства, а также была связана с философией, то у европейцев математика становится прежде всего языком естествознания, на котором записываются его законы.

При своем рождении европейская физика состояла из двух различных направлений: европейской теоретической физики и европейской экспериментальной физики. Первая служила для описания физических явлений, в основном связанных с небесной механикой, а вторая — для установления экспериментальных физических законов. Соответственно, возникли две европейские математики: ***европейская теоретическая математика***, которая была языком теоретической физики, и ***европейская прагматическая математика***, которая, в частности, была языком экспериментальной физики.

Европейскую теоретическую математику можно рассматривать как математический анализ в широком понимании этого слова. Это означает, что математический анализ включает в себя, наряду с дифференциальным и интегральным исчислением, также вариационное исчисление, теорию обыкновенных дифференциальных уравнений, теорию уравнений в частных производных, и ряд других отраслей высшей математики. Одним из основных понятий математического анализа является понятие непрерывной функции. Подобного математического объекта не знала греческая математика. Кроме того, математический анализ использует определенного вида числа, с которыми до него математики не встречались, и формальное определение которых было дано только во второй половине XIX в. Эти числа естественно назвать ***математическими числами***. (Под ***математическим числом,*** согласно нестрогому определению, понимается некий математический объект, взаимооднозначно соответствующий точке на вещественной прямой или на плоскости).

Европейская прагматическая математика возникла из-за потребностей экспериментальной физики и вычислительных задач небесной механики. Первые задачи этой математики были поставлены в работах Галилея и Кеплера. Сюда относятся задачи нахождения численных значений параметров функций, представляющих собой математические записи экспериментальных законов. Затем к ним присоединились и другие задачи, требующие найти конкретное число или группу конкретных чисел. Например, рассчитать значения функции с помощью степенного ряда, и т.п. Очевидно, что прагматическая математика имеет дело с числами, которые в десятичной позиционной системе можно записать с помощью конечного числа цифр. Такие числа называются ***прагматическими числами***. Ясно, что любое прагматическое число является рациональным числом.

Появление европейской математики не означало, что греческая математика исчезла. Греческая математика продолжала развиваться, и в ней в последующие годы были получены выдающиеся результаты. В частности, применение, например, методов математического анализа в теории чисел позволило развить богатые глубокими математическими результатами теории. Однако все же в центре интересов большинства математиков находилась европейская математика, которая оттеснила греческую математику.

Европейская математика отличалась от греческой не только целями исследования, о чем уже говорилось выше, но и объектами исследования. Если объектами исследования греческой математики были натуральные числа и геометрические фигуры, то объектами исследования европейской математики стали, прежде всего, функции и формулы.

Европейская теоретическая математика принципиально отличается от европейской прагматической математики. Основной задачей теоретической математики являлось получение (и если это возможно, доказательство) утверждений, в то время как основной задачей прагматической математики являлось численное решение конкретных задач, т.е. получение в результате или числа, или группы чисел (но не утверждения). Теоретическая математика оперирует математическими числами, в то время как прагматическая математика оперирует прагматическими силами. Если теоретическая математика является непрерывной математикой, т.е. изучает главным образом непрерывные функции, то прагматическая математика оперирует только дискретными наборами прагматических чисел.

В XIX в. европейская математика пополнилась еще одним разделом науки: ***математической логикой***. Математическая логика принципиально отличается как от теоретической математики, так и от прагматической математики. Основной задачей математической логики является исследование элементов математического доказательства на разных уровнях абстракции, а также общих проблем, связанных с логическими основаниями математических теорий. Другими словами, абстрактный уровень математической логики выше, нежели обычной математики, т.е. математическая логика относится к метаматематике.

Европейская интеллектуальная революция в ее части, относящейся к математике, в основном закончилась во второй половине XIX в. К этому времени европейская теоретическая математика (математический анализ) в целом превратилась в аксиоматическую теорию. Была создана математическая логика, которая и позволила превратить математический анализ в аксиоматическую теорию. Однако сама теоретическая математика разделилась на два направления, одно из которых стали называть ***прикладной математикой***, а второе – ***чистой математикой***. Математика, которая служит в качестве языка моделирования для объектов, находящихся *вне математики*, а также поставляет методы исследования математических моделей этих объектов, является *прикладной математикой*. Математика, объектами исследования которой являются математические объекты, называется *чистой математикой*. Сравнивая определение прикладной математики с определением чистой математики, можно заметить, что разница между ними заключается в том, что чистая математика занимается вопросами моделирования *внутри математики*, а прикладная математика – вопросами моделирования объектов, лежащих вне математики.

Отметим два принципиальных отличия прикладной математики от прагматической математики. Во-первых, результатом математического исследования в области прикладной математики является доказательство определенных утверждений, а результат решения задачи в прагматической математике состоит в получении конкретного числа или набора конкретных чисел. Во-вторых, прикладная математика оперирует математическими числами, в то время как прагматическая математика оперирует прагматическими числами.

Европейская прагматическая математика, как мы уже говорили, в XVII в. сосредоточила свое основное внимание на решении вычислительных задач в экспериментальной физике и небесной механике. В XVIII в. она смогла также решать определенные статистические задачи и строить таблицы, необходимые в навигации, а в середине XIX в. явилась одним из основных инструментов в инженерии, что значительно расширило количество расчетов. С этого времени прагматическая математика стала активно применяться для решения практических задач, особенно тех, которые были связаны с внедрением новых технологий в экономику. Это значит, что математика превратилась в *необходимый инструмент* технологического прогресса, т.е. стала, по своей сути, прикладной математикой.

Употребляемое словосочетание «прикладная математика» может современного человека ввести в определенное заблуждение. Дело в том, что смысл, вкладываемый математиками, физиками и философами в это словосочетание, менялся в течение истории развития математики. С момента возникновения математики и до Галилея и Ньютона такого термина не существовало в умах ученых, ибо тогда математика рассматривалась или как часть философии, или как вид высокого интеллектуального искусства, или как интеллектуальный спорт.

Ньютон был тем, кто изменил общественное отношение к математике. Он спустил математику с небес чистого искусства и интеллектуального спорта, заставив ее служить языком для описания законов природы, о чем мечтали все философы со времен древней Греции. Другими словами, он превратил математику в служанку для физики, астрономии и других наук. С этих пор математический анализ, одним из создателей которого был Ньютон, стал частью прикладной математики. Однако ему и его последователям не удалось полностью спустить математику с небес, где она продолжала обитать, благодаря чистой математике. Отметим также, что даже во времена Ньютона математика не решала практических задач, ибо ею занимались в основном профессора университетов, а также те, кто не имел никакой связи с теми проблемами, которые ставила жизнь. Те же, кто действительно решал практические задачи, по существу, не были знакомы с нею. Да, по существу, в то время и не было необходимости в математике для решения практических задач, методы прематематики вполне удовлетворяли практиков. Единственной областью приложения математики, согласно традиции, идущей еще с древней Греции, была астрономия, точнее, небесная механика.

Только технологический прогресс, который начался в начале XIX в., как уже говорилось выше, накрепко привязал к себе европейскую прагматическую математику. Так как формулы для конкретных расчетов поставляет теоретическая математика, то и теоретическая прикладная (но не чистая) математика стала также необходимым инструментом технологического прогресса.

Во второй трети XX в., в связи с мировым экономическим кризисом и Второй мировой войной, перед человечеством встали новые задачи, с которыми оно до тех пор не встречалось. Они пришли из области экономики, социальной сферы, а также из управления военными действиями. Они принципиально отличались от тех задач, которыми до сих пор занималось человечество. Было обнаружено, что формулировки естественнонаучных задач плохо подходят в качестве формулировок задач, касающихся новых объектов исследования. Более того, естественнонаучная методология, основанная на обязательной экспериментальной проверке и на дедукции в рамках принятой в математике строгости, часто просто не может быть использована. Поэтому для решения этих новых задач потребовалась другая научная методология и другие методы решения.

Разработка новой методологии была связана с новой интеллектуальной революцией, которая радикально изменила и цели научных исследований и способы проведения этих исследований. Эту революцию естественно назвать ***мировой интеллектуальной революцией***, ибо в ней приняли участие ученые из многих стран, причем существенный вклад внесли ученые из США. Одним из результатов этой революции было создание новой науки, которую назовем ***мировой наукой***. Описанию мировой интеллектуальной революции и развитию математической методологии в XX столетии посвящена четвертая часть книги.

Мировая наука по всем своим основным элементам отличается от европейской науки. *Во-первых*, объектами исследования мировой науки являются так называемые сложные системы, к которым относятся экономические и социальные системы, биологические системы и т.п. Объектами исследования европейской науки являются физические явления и объекты. *Во-вторых*, целью европейской науки является описание физических явлений, а целью мировой науки – прогнозирование последствий принимаемых управленческих решений. *В третьих*, одним из основных методов исследования в рамках европейской науки является проведение экспериментов, а в рамках мировой науки проводить эксперименты практически нет никакой возможности.

Возникновение мировой науки ни в коей мере не означает, что европейская наука исчезла. Европейская наука продолжала существовать и бурно развиваться как в старых своих отраслях, так и создавая новые математические дисциплины.

Одной из отраслей мировой науки является и математика. Поскольку в рамках мировой математики она принципиально отличается от европейской, то для отличия мы будем называть ее ***мировой математикой***. Так как задачи, которые решает мировая математика, являются практическими задачами, то она относится к прагматической математике.

Мировая математика к настоящему времени создалась из трех направлений: исследование операций, кибернетика и системный подход. Каждое из них внесло свой специфический вклад в мировую математику.

Исследование операций обогатило математику рядом новых математических дисциплин, основы которых были заложены при решении практических задач из области экономики и управления. К этим дисциплинам относятся линейное и нелинейное программирование, теория запасов, теория массового обслуживания и т.д. Все эти новые математические дисциплины дали толчок для развития европейской математики, снабдив ее как новыми математическими объектами, так и новыми идеями для их исследования. Исследование операций достаточно «близко» к европейской математике.

Вклад кибернетики в мировую математику носит, в значительный степени, методологический характер, хотя и здесь мы сталкиваемся с новыми математическими дисциплинами, такими, как теория информации. Однако основное ее значение заключается в новой методологии, которую выработала кибернетика и которая основывается на принципе «черного ящика». Эта методология позволила не только посмотреть на математическое моделирование с иной точки зрения, но и открыла путь для использования общей теории моделирования на различных формализованных языках.

И, наконец, третье направление – системный подход, который носит преимущественно методологический характер. Основанная на нем так называемая системная методология наиболее полно, среди существующих методологий, отвечает природе и сути решаемых экономических, социальных, управленческих проблем. Базисным понятием в системном подходе является понятие системы. Одним из основных свойств исследуемых в рамках мировой науки объектов является их сложность, т.е. мировая наука изучает прежде всего сложные системы. Сложность объекта выражается в том, что, во-первых, сам объект, по своей сути, есть нечто большее, чем сумма его частей, во-вторых, объект определяет природу составляющих его частей, в третьих, части объекта не могут быть познаны при рассмотрении вне целого; в четвертых, части объекта находятся в постоянной взаимосвязи и взаимозависимости.

Методология европейской науки рассматривала Вселенную как гигантский механизм, который подчиняется определенным законам движения. Такой подход предполагал изучение сложных явлений путем разложения их на элементарные компоненты. Именно этот методологический подход явился основной методологической причиной неудачи в его использовании для изучения экономических и социальных объектов.

Как и предыдущие два направления, т.е. исследование операций и кибернетика, так и системный подход для решения возникших задач вынужден обращаться к определенному типу математических исследований. Это связано с тем, что для исследования общих свойств, которые существуют у объектов различной природы, необходим определенный формализованный язык для описания этих свойств. Такой язык, в котором играют роль те или иные количественные или формально логические отношения, по своей природе является математическим языком. Это означает, что системный подход требует создания определенной математики, которая является частью мировой математики. Эта наука, которая представляет собой набор различных математических дисциплин, изучает не только количественные отношения, но также и формализованные логические связи между различными частями объекта. В качестве примера можно привести формализацию процесса принятия решений.

Большинство проблем, которые приходится решать в рамках мировой математики, требует выполнения значительного числа вычислений. Такие задачи стало возможным решать только с помощью соответствующей вычислительной техники, которая появилась во второй половине XX в. Появление компьютеров облегчило проведение больших вычислительных процессов. Кроме того, компьютеры также стали важнейшим инструментом для моделирования сложных объектов.

Рождение компьютеров было прежде всего связано с необходимостью численного решения систем дифференциальных уравнений, и только затем их стали применять для обработки больших массивов информации, а также для построения компьютерных моделей различной сложности. Все компьютеры обладают одной важной особенностью, которой обычно уделяют относительно мало внимания. Эта особенность заключается в том, что каждый компьютер обрабатывает только числа, в цифровую запись которых входит ограниченное сверху количество цифр. Такие числа мы будем называть

компьютерными числами. На множестве компьютерных чисел можно определить ряд операций, в частности, напоминающих арифметические. Эти операции отличаются от обычных арифметических тем, что в силу особенности, указанной выше, при их выполнении автоматически происходит округление. На множестве компьютерных чисел с помощью различных операций над ними можно построить по аналогии математику, которую назовем ***компьютерной математикой***.

Компьютерная математика, которую можно рассматривать как часть мировой математики, принципиально отличается от других типов математики. Прежде всего, каждый из этих типов оперирует специфичными для него числами: теоретическая математика – математическими числами, прагматическая математика – прагматическими числами, компьютерная математика – компьютерными числами. Типы математик также отличаются и целями: основной целью теоретической математики является описание физических явлений, целью прагматической математики — численное решение задач, а целью компьютерной математики – построение и анализ компьютерных моделей.

Возможности компьютерной математики в проведении исследований являются более широкими, нежели возможности теоретической или прагматической математики. Это расширение можно объяснить, по крайней мере, тремя причинами.

Во-первых, компьютерная математика позволяет проводить различные эксперименты в области математики. Другими словами, компьютерная математика, в отличие от других типов математики, является *экспериментальной* наукой в полном смысле этого слова.

Во-вторых, компьютерная математика позволяет не только проводить вычисления в больших объемах, но также, что не менее важно, осуществлять моделирование и логических операторов. Иначе говоря, компьютеры могут быть использованы и для моделирования различных логических процессов, что делает возможным получение новых утверждений, которые представляют собой новые знания.

В третьих, технологические особенности компьютеров позволяют осуществить новые, не встречаемые до сих пор методы исследования. В качестве примера можно привести статистическое моделирование с помощью метода Монте Карло.

Из всего вышесказанного следует, что математика состоит из нескольких различных типов, которые в той или иной степени широко применяются для решения различных задач, в которых требуется что-то вычислить или доказать.

Ну и что? Неужели содержание книги представляет просто интеллектуальный интерес, заключающийся в том, что можно несколько по-другому взглянуть на историю математики и выразить определенное несогласие с трактовками фактов другими авторами?

На самом деле весь исторический экскурс необходим для обоснования ряда методологических проблем математики, которые возникают, исходя из самой структуры этой науки. Для иллюстрации приведем несколько методологических проблем математики. Эти проблемы наглядней сформулировать в рамках математического модулирования.

С позиций теории моделирования, исследования в рамках теоретической математики можно рассматривать как процесс моделирования с использованием одной модели на математическом языке, которая оперирует математическими числами. Исследования в рамках прагматической математики требуют уже использование двух адекватных по написанию моделей, представленных в виде формул, одна из которых оперирует математическими числами и относится к теоретической математике, а другая — прагматическими числами и относится к прагматической математике. Наконец, в компьютерной математике мы имеем дело с одновременным ис-пользованием трех моделей: это теоретико-математическая модель, прагматическая модель и компьютерная модель, записанная на определенном языке программирования.

Модельный подход позволяет в достаточно ясной форме понять проблемы, возникающие при использовании в разных типах математики. Теоретическая математика, которая, в основном, использует только одну модель, не встречается ни с какими проблемами с точки зрения процесса моделирования. Эти проблемы в теоретической математике встречаются лишь тогда, когда приходится для решения задачи использовать одновременно две модели. Подобная ситуация возникает, когда для решения той или иной задачи приходится заменять непрерывную модель на дискретную. В этом случае необходимо обе модели рассматривать совместно. Но тогда возникает вопрос, каким образом выбрать подходящую дискретную модель. На этот вопрос можно получить ответ только в рамках процесса моделирования.

Более сложная ситуация возникает, когда необходимо для решения задачи сочетать теоретическую модель с прагматической моделью. Это происходит, когда необходимо вычислить значение той или иной функции или численно решить уравнение. В этой ситуации теоретическая модель оперирует математическими числами, в то время как прагматическая модель оперирует прагматическими числами. Здесь мы сталкиваемся с противоречием, когда задача формулируется в терминах теоретической математики, а решение надо искать в терминах прагматической математики. Но тогда возникает принципиальный вопрос: в каком случае решение, полученное на основе прагматической модели, является решением задачи, сформулированной на основе теоретической модели? Иначе говоря, каким требованиям должна удовлетворять прагматическая модель, чтобы полученный результат являлся решением задачи?

Еще более сложная ситуация возникает, когда для решения задачи привлекаются компьютеры. В этом случае необходимо использовать одновременно три модели: теоретическую, прагматическую и компьютерную. Совместное использование этих трех моделей приводит к тому, что одновременно применяются три типа чисел: математические, прагматические и компьютерные. Решение задачи, которая формулируется на теоретическом языке, получается в результате вычислений на основе компьютерной модели, построенной с помощью прагматической модели. Естественно возникает вопрос: при каких условиях компьютерный результат можно считать решением первоначальной задачи?

Приведенные методологические проблемы, которые тесно связаны с чисто практическими задачами, могут оправдать «копание» в истории развития математики. Попытка понять суть развития математики (с той или иной позиции) позволяет упорядочить, а главное, выразить на современном языке проблемы, возникающие при решении практических задач.

Часть 1. Общие замечания в связи с математикой.

«Математика, рассматриваемая правильно, владеет не только истиной, но и высшей красотой – красотой холодной и строгой, подобной красоте скульптуры, без всякой апелляции к слабостям нашей натуры, без этих задрапированных капканов живописи и музыки, красотой величественно чистой, обладающей таким совершенством, которое свойственно лишь величайшему искусству».

Б. Рассел

Глава 1. Общий взгляд на математику. Математика: наука, искусство, спорт.

1.1. Общий взгляд на математику.

«Что же такое математика: россыпь алмазов, скрытых в недрах реального мира и постепенно извлекаемых их оттуда, или груда искусственных камней, созданных людьми, столь блестящих, что они своим блеском ослепили иных математиков, которые и без того переполнены гордостью за свои творения?»

М. Клайн

Когда мы хотим дать пример науки, то первое, что приходит нам в голову, это математика. Математика оказала влияние на все области интеллектуального развития человечества от науки и до теологии и мистики. В нашем обычном видении мы представляем математику как некое стройное здание с гармоничными пропорциями, покоящееся на надежном фундаменте, конечно, все ещё незаконченное и вечно в процессе стройки, которая расширяет это здание, как вширь, так и ввысь, не ухудшая пропорций здания и не умаляя его величия. Математики являются, в каком-то смысле, символом интеллектуальности и учености, адресом интеллектуального уважения и почтения.

Однако у тех, кто непосредственно в той или иной форме связан с математикой, возникают вопросы относительно сути математики. В качестве примера можно привести высказывание одного из крупных математиков XX в. Г. Вейля:

«Вопрос об основаниях математики и о том, что представляет собой, в конечном счете, математика, остается открытым. Мы не знаем какого-то направления, которое позволяет, в конце концов, найти окончательный ответ на этот вопрос, и можно ли вообще ожидать, что подобный «окончательный» ответ будет когда-нибудь получен и признан всеми математиками. «Математизирование» может остаться одним из проявлений творческой деятельности человека, подобно музицированию или литературному творчеству, ярким и самобытным, но прогнозирование его исторических судеб не поддается рационализации и не может быть объективным».

В попытках ответить на поставленный вопрос, можно рассматривать математику как один из видов интеллектуального искусства, или как «поле» для интеллектуальных спортивных соревнований, или как символ функционального использования для удовлетворения потребностей в развитии других наук, или как один из языков человеческого общения. Все указанные рассмотрения имеют право на свое существование. Но и они не исчерпают всего многообразия математики.
Математика является продуктом человеческого интеллекта, одним из выдающихся достижений человеческого интеллектуального развития. *Посвященные* находят в ней определенный образ жизни, на алтарь которого они бросают годы труда, страсти и вдохновение.

«Люди, посвященные в ее (математики) тайны, вкушают наслаждения, подобные тем, которые дает нам живопись и музыка. Они восторгаются изящной гармонией чисел и форм; они приходят в восхищение, когда какое-нибудь новое открытие раскрывает перед ними неожиданные перспективы. Разве в наслаждениях, испытываемых этими людьми, нет эстетического характера, несмотря даже на то, что чувства в этих состояниях не принимают никакого участия? Правда, только немногие избранные призваны к тому, чтобы вполне вкусить эти наслаждения. Но разве это не имеет места и в случае наиболее благородных искусств?» (А.Пуанкаре (1), стр.219).

Ему вторит и Б. Рассел (Б.Рассел (1), стр.52):

«Легко может показаться, что эмпирический философ – раб исследуемого материала, но чистый математик, как и музыкант, - свободный творец собственного мира упорядоченной красоты».

Другие видят в математике основы для теологии, мистики и т.п.

«Я полагаю, что математика является главным источником веры в вечную и точную истину, а также в сверхчувственный интеллигибельный мир. Геометрия имеет дело с точными окружностями, но ни один чувственный объект не является точно круглым; и как бы мы тщательно ни применяли наш циркуль, окружности всегда будут до некоторой степени несовершенными и неправильными. Это наталкивает на предположение, что всякое точное размышление имеет дело с идеалом, противостоящим чувственным объектам. Естественно сделать еще один шаг вперед и доказывать, что мысль благороднее чувства, а объекты мысли более реальны, чем объекты чувственного восприятия. Чистая математика льет воду на мельницу мистических доктрин об отношении времени к вечности, ибо математические объекты, например, числа (если они вообще реальны) являются вечными и вневременными. А подобные вечные объекты могут в свою очередь быть истолкованы как мысли бога». (Б. Рассел (1), стр.56)

Третьи относятся к математике как к специфическому языку. Это мнение бытует у части физиков, в подтверждение чего можно привести высказывание Р. Фейнмана и др. ((1), стр. 55):

«Математика, с нашей точки зрения, не наука в том смысле, что она не относится к *естественным* наукам. Ведь мерило ее справедливости отнюдь не опыт».

Эти слова являются, по существу, перифразом известных слов А. Пуанкаре, написанных им более чем на половину столетия ранее:

«Итак, все законы выводятся из опыта, Но для выражения их нужен специальный язык. Обиходный язык слишком беден, кроме того, он слишком неопределенен для выражения столь богатых содержанием точных и тонких соотношений.
Таково первое основание, по которому физик не может обойтись без математики; она дает ему единственный язык, на котором он в состоянии изъясняться». (А. Пуанкаре(1), стр.219-220).

Четвертые относятся к математике как к некой методологии организации мышления. Основные моменты используемой для доказательства математических утверждений логики лежат в основании так называемого западноевропейского научного способа мышления, благодаря которому западная цивилизация обеспечила себе интеллектуальное и технологическое превосходство в мире.

«Под математическим способом мышления я понимаю, во-первых, особую форму рассуждений, посредством которых математика протекает в науки о внешнем мире – в физику, химию, биологию, экономику и т.п. и даже в наши размышления о повседневных делах и заботах, и, во-вторых, ту форму рассуждений, к которой прибегает в своей собственной области математик, будучи представленным самому себе». (Г.Вейль, 1, стр.6)

Пятые видят в ней прикладную науку, без которой невозможно технологическое, экономическое развитие человечества.
И, наконец, *шестые* видят в ней свой интеллектуальный мир (являющийся внутренним интеллектуальным миром), в котором они находятся и проводят значительную часть своей сознательной жизни. Сказанное хорошо иллюстрируется следующими словами А. Эйнштейна, смысл которых практически не изменится, если слово «наука» заменить словом «математика»:

«Храм науки – строение многосложное. Различны пребывающие в нем люди и приведшие их туда духовные силы. Некоторые занимаются наукой с гордым чувством своего интеллектуального превосходства; для них наука является тем подходящим спортом, который должен им дать полноту жизни и удовлетворение честолюбия. Можно найти в храме и других: они приносят сюда в жертву продукты своего мозга только в утилитарных целях. Если бы посланный богом ангел

пришел и изгнал из храма всех людей, принадлежащих этим двум категориям, то храм бы катастрофически опустел, но в нем остались бы еще люди, как прошлого, так и нашего времени...
Я хорошо знаю, что мы только с легким сердцем изгнали многих людей, построивших большую, возможно даже наибольшую, часть науки; по отношению ко многим принятое решение было бы для нашего ангела горьким. Но одно кажется мне несомненным: если существовали люди подобные изгнанным, храм бы не поднялся, как не мог бы вырасти лес из одних лишь вьющихся растений. Этих людей удовлетворяет, собственно говоря, любая арена человеческой деятельности; станут они инженерами, офицерами, коммерсантами или учеными, это зависит от внешних обстоятельств. Но обратим вновь свой взгляд на тех, кто удостоился милости ангела. Большинство из них люди странные, замкнутые, уединенные; несмотря на эти общие черты, они в действительности сильнее разнятся друг от друга, чем изгнанные. Что привело их в храм? Нелегко на это ответить, и ответ, безусловно, не будет одинаковым для всех. Как и Шопенгауэр, я, прежде всего, думаю, что одно из наиболее сильных побуждений, ведущих к искусству и науке, - это желание уйти от будничной жизни с ее мучительной жестокостью и безутешной пустотой, уйти от уз вечно меняющихся собственных прихотей. Эта причина толкает людей с тонкими душевными струнами от личного бытия вовне в мир объективного видения и понимания. Эту причину можно сравнить с тоской, неотразимо влекущей горожанина из окружающей его шумной и мутной среды к тихим высокогорным ландшафтам, где взгляд далеко проникает сквозь неподвижный чистый воздух, тешась спокойными очертаниями, которые кажутся предназначенными для вечности.
Но к этой негативной причине добавляется позитивная. Человек стремится каким-то адекватным способом создать в себе простую и ясную картину мира; и это не только для того, чтобы в известной мере попытаться заменить этот мир созданной им картиной. Этим занимаются художник, поэт, теоретизирующий философ и естествоиспытатель, каждый по-своему. На эту картину и ее оформление человек переносит центр тяжести своей духовной жизни, чтобы в ней обрести покой и уверенность, который он не может найти в слишком тесном головокружительном круговороте собственной жизни». (А. Эйнштейн (1), стр.8-9).

Седьмые относятся к математике как к интеллектуальному спорту. Подобное перечисление можно продолжить и дальше.
Многообразие подходов к математике связано с тем, что математика и сегодня выступает в реальной жизни, как мы уже говорили, в различных ипостасях, в разных функциональностях. Таким образом, при нашем обсуждении вопроса, что такое математика, необходимо всегда иметь в виду все эти ипостаси, а также разделять их между собой. Другими словами, когда мы делаем какое-либо утверждение о математике в целом, необходимо подчеркивать, о какой ипостаси математики мы говорим.

Ниже нас будет интересовать математика *только* в следующих ипостасях. *Во-первых*, математика как язык моделирования, используемый для построения и исследования моделей в различных областях знаний, а также для выработки и принятия решений. *Во-вторых*, математика как система организации мышления, позволяющая получать новые утверждения из других утверждений, обладающие определенными свойствами. Эта система мышления используется для изучения моделей различного типа. *В-третьих*, математика как наука, которая представляет собой набор нетривиальных знаний, полученных из набора ряда теорий. Всем другим ипостасям, среди которых математика рассматривается как интеллектуальный спорт или как вид интеллектуального искусства, мы практически не будем уделять внимание.

В связи с этими ипостасями сделаем вкратце несколько замечаний.

Во-первых, относительно математики как языка. Как мы уже говорили выше, в практической жизни мы часто встречаем задачи, связанные с вычислением тех или иных количеств. Подобнее задачи человечество решало в рамках различных цивилизаций и до появления математики. Для удобства дальнейших рассуждений, будем говорить, что решение подобных практических задач составляет содержание той области знаний, которую мы будем называть прематематикой. Именно существование прематематики и дает окружающим ощущение и уверенность в прикладном характере математики.

Однако смысл и содержание, которое вкладывается в одни и те же слова в прематематике и в математике, часто совершенно отличаются друг от друга, что может привести к путанице из-за того, что математическое понятие подменяется прематематическим понятием, и наоборот. Сегодня прематематика широко использует математические формулы. Математические формулы пришли в нее из математики, что связано с тем, что понятие формулы существенно облегчило запись методик решения практических задач. Однако использование и толкование этих формул в математике и в пренауке принципиально отличаются друг от друга. Ниже мы уделим этому внимание и более подробно рассмотрим эти отличия. Здесь же мы только остановимся на упоминании этого факта, чтобы подчеркнуть, что часто математику путают с прематематикой.

Во-вторых, на математику можно посмотреть как на некоторый свод правил мышления, организации и проведения интеллектуальных рассуждений. Другими словами, математика определяет так называемое «математическое мышление». Примером такого мышления является технология проведения математического доказательства, которому стараются обучить в школе с раннего детства. Заметим, что математическое мышление принципиально отличается от практического мышления. Необходимо отметить, что так называемое научное мышление в наше время полностью основано на математическом мышлении. В этом смысле математика составляет интеллектуальную методологическую базу для проведения научных рассуждений. В этом случае можно сказать, что «степень научности» области знаний существенно зависит от того, насколько близка логика рассуждений в этой области к математическому мышлению.

В подтверждение последнего утверждения приведем следующие слова одного из крупнейших философов И. Канта:

«Так как во всяком учении о природе имеется науки в собственном смысле лишь столько, сколько имеется в ней априорного знания, то учение о природе будет содержать науку в собственном смысле лишь в той мере, в какой может быть применена в нем математика». (И. Кант (1), т.6, стр.59)

В-третьих, математика является наукой, имеющей свой язык, методологию, методы проведения исследований, а также содержание, состоящее из набора различных математических теорий. В определенном смысле она представляет собой замкнутый в себе интеллектуальный мир, доступный ограниченному кругу посвященных, обладающих необходимым объемом знаний, а также и склонностью к интеллектуальным рассуждениям на специфическом математическом языке. Для существования и деятельности в этом мире нет никакой необходимости в интеллектуальной связи с внешним окружающим миром.

Это утверждение легко можно проиллюстрировать историей зарождения математики. Математика родилась в древней Греции в рамках определенного мистического учения или религии. Она возникла, прежде всего, как нечто представляющее высшую интеллектуальную степень красоты и гармонии, которая связана с понятиями натурального числа и геометрической фигуры и которая выражается в виде отношений между этими математическими объектами.

Корни такого подхода лежат в религиозном учении Пифагора, испытавшего, в свою очередь, сильное влияние со стороны различных религий и мистических учений Востока. Большую роль в этом направлении сыграло знаменитое открытие Пифагора: колеблющие струны производят при одинаковом натяжении гармоническое созвучие в том случае, когда их длины находятся друг к другу в простом рациональном соотношении. Гармоническое согласие струн создает прекрасный звук. Из-за беспокойства, связанного с неразрешенностью, незаконченностью звука, человеческое ухо воспринимает диссонанс как помеху, консонанс же, гармонический покой – как нечто прекрасное. Тем самым математическое соотношение оказалось связано с источником прекрасного.

Красота, гласит одно из античных определений, - это правильное согласование частей друг с другом и с целым. В данном случае части – это отдельные тоны, целое – это гармонический звук. Математическое соотношение оказалось способным сочетать первоначально независимые части в нечто целое и тем самым создать красоту. Это открытие привело к тому, что в человеческое сознание вошло другое, нежели чувственное понимание красоты, а именно, понимание интеллектуальной красоты, которая связана с чисто интеллектуальными объектами. Если традиционные отрасли искусства воздействовали *на физические чувства и физические ощущения* человека, то математика возникла, прежде всего, как некоторый вид искусства, который воздействует только на интеллект человека. Этот вид искусства мог воздействовать только на подсознательные или сознательные «ощущения» *интеллекта,* вызывая у индивидуума чувства удовлетворенности или неудовлетворенности, радости или огорчения.

Так как согласно известному утверждению Пифагора: «все на свете, решительно все на свете гармонично», - то для понимания пестрого многообразия природных явлений следовало найти единый формальный принцип, выражающий гармонию мира, который, по его мнению, должен быть записан на математическом языке. В результате обнаруживается связь между понятным и прекрасным. Ведь если в прекрасном видеть согласие частей друг с другом и с целым и если, с другой стороны, та же формальная взаимосвязь впервые делает возможным какое бы то ни было понимание вообще, то переживание прекрасного почти отождествляется и с переживанием понятой или хотя бы предугадываемой взаимосвязи.

Значение прекрасного для отыскания истины признавалось и особо отмечалось во все времена. Латинский девиз «Simplex sigillum veri» («Простота – печать истины») начертан на физической аудитории Геттингенского университета как завет тем, кто хочет открыть новое знание. А другой девиз, «Pulchritudo splendor veritatis» («Простота – сияние истины»), можно понять в том смысле, что исследователь узнает истину, прежде всего, по этому сиянию, по излучаемому ею свечению. Красота, одним из выражений которой является симметрия, часто служила и сегодня служит основной проверкой истинности доказываемых математических утверждений. Более того, красота высказанного как гипотеза математического утверждения являлась и является символом истинности, т.е. красота служила индикатором возможности нахождения математического доказательства, которое превратит гипотезу в интеллектуальный факт, т.е. в теорему. Таким образом, в один философский клубок вместе связаны такие понятия различной природы, как простота, красота, истинность интеллектуальных утверждений. В этой ситуации математик чувствовал и чувствует себя человеком искусства, творцом прекрасного особого рода, которое является характерным для интеллектуального искусства.

Не только к математическим утверждениям, но и к математическим доказательствам этих утверждений, т.е. к математическим рассуждениям, утверждений математики часто относятся как к произведениям интеллектуального искусства. Это, в частности, выражается в том, что у математиков пользуются уважением короткие или изящные доказательства уже известных математических фактов, которые можно скорее рассматривать как произведения интеллектуального искусства. В качестве примера можно привести известное индийское доказательство теоремы Пифагора с помощью двух рисунков. Поэтому математики часто ищут другие, новые, более красивые и простые доказательства уже известных математических утверждений. В таких процессах проведения математических доказательствах часто простота и красота идут вместе.

Одним из видов интеллектуального математического искусства с первых шагов математики является решение математических задач с помощью минимального количества математических средств, что еще раз свидетельствует в пользу того, что математики относятся к математике как искусству. В качестве примера таких задач можно привести задачи из геометрии, история которой содержит, в частности, решение специфичных задач на построение с помощью циркуля и линейки, с которыми каждый из нас знакомится уже в начальной школе. Такие проблемы, как возможность триангуляции угла с помощью только циркуля и линейки, или возможность построения правильных многоугольников с помощью только циркуля и линейки, занимали умы математиков вплоть до начала настоящего времени. Да и сегодня подобные задачи часто встречаются на различных математических олимпиадах для школьников.

Напомним, что задачи, которыми занималась математика при своем рождении, относились к абстрактным свойствам чисел (из решения этих задач возникла отрасль математики, которая в последствии была названа *теорией чисел*) или к изучению свойств абстрактных геометрических фигур (решения этих задач послужили созданию другой отрасли математики, которая была названа *геометрией*). Эти две отрасли легли в основание того, что сегодня называют *чистой математикой*. По своей сути, чистая математика в то время относилась к определенному виду интеллектуального искусства. И хотя чистая математика за две с половиной тысячелетия своего развития прошла долгий путь, и сегодня она представляет собой значительную часть всей математики, все же по многим признакам она остается видом интеллектуального искусства, но уже более изощренного. В качестве иллюстрации такого отношения к чистой математике приведем высказывание крупного математика конца XIX века – первой половины XX века Г. Харди (1):

«В понятие чистой математики я включаю всю совокупность математических знаний, обладающих непреходящей эстетической ценностью, какой обладает, например, греческая математика, которая вечна потому, что лучшая ее часть, подобно лучшим произведениям литературы, и через тысячи лет продолжает приносить тысячам людей эмоциональное удовольствие».

В чистой математике большую роль, как и в любом искусстве, играет мода. Эта мода диктует молодым математикам (и не только молодым) наиболее престижные (на данный момент) области математики в качестве направления и выбора тем для их исследований. Модные направления возникают и исчезают в зависимости от центров математических исследований, которыми являются престижные университеты или харизматичные ученые. Вместе с изменением моды исчезают из поля зрения исследователей и целые области математических исследований. История математики полна подобными примерами.

Рассмотрение математиком своей деятельности как занятие интеллектуальным искусством позволяет ему ощущать свою интеллектуальную исключительность, которая в определен-ной мере дает ему психологическую самозащиту при различных интеллектуальных неудачах, которые происходят при часто многолетних усилиях доказать то или иное математическое утверждение.

Другим мотивом, двигающим математиком, заставляя его тратить громадные как физические, так и моральные силы для решения *известной* труднейшей математической задачи, является то, что он стремится решить *первым* эту задачу. Это страстное стремление полностью аналогично стремлению спортсмена выиграть соревнование, в котором участвуют другие спортсмены. Другими словами, математик часто рассматривает свою деятельность также как на занятие интеллектуальным спортом. В силу такого подхода на любые математические задачи можно посмотреть как на задачи интеллектуального спорта, выставленные на интеллектуальной спортивной олимпиаде, проведение которой не ограничено как во времени, так и по количеству участников. Целью этого соревнования является поиск их решения, заключающийся в доказательстве определенного математического утверждения (теоремы). Все математики прошлого были непременными участниками подобных олимпиад. Более того, право называться математиком в прошлом было, прежде всего, связано с участием в таких олимпиадах.

Классическим примером здесь являются работы гения математики Ф. Гаусса по вписыванию в окружность правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки. Заметим, что на могильном камне Ф. Гаусса выбит правильный 17-угольник, вписанный в окружность, в честь того, что он первый решил эту древнюю геометрическую задачу.

В XVII-XVIII века возникло большое число проблем (задач), связанных с целыми числами (проблемы П. Ферма, Гольдбаха и т.п.), на решение которых был брошен огромный интеллектуальный потенциал человечества. Занятие решением подобных задач можно рассматривать как продолжение интеллектуального древнегреческого спорта, у истоков которого стояли пифагорейцы - ученики и последователи Пифагора. Попытки решения этих задач подобны попыткам спортсменов, выиграть престижные соревнования. Аналогично призам в спорте, и в математике были установлены (и сейчас устанавливаются) призы, в том числе и крупные денежные, за решение подобных задач. В качестве примера уместно здесь напомнить значительный денежный приз (премию) за доказательство большой теоремы Ферма, который был установлен в конце XIX века и который в течение нескольких десятилетий служила источником финансирования математических исследований в Геттингенском университете. Доказательство этой теоремы, на получение которого сообщество математиков затратило три с половиной столетия, в конце XX века было отмечено престижной математической премией Филдса. Отметим, что Эндрю Уайлс (1995), которому принадлежит завершающий рывок в этом многовековом марафоне, посвятил этому более двадцати лет своей жизни. И сегодня одним из престижных занятий математиков является решение чисто внутренних математических проблем, которые представляют собой задачи, выставленные на мировой олимпиаде по математике, где призами являются престижные премии (как премии Филдса, Вульфа и др.), а также ставки и кафедры в престижных научных центрах и в университетах. В качестве задач на таких олимпиадах предлагались и предлагаются такие задачи как проблемы Д. Гильберта, проблемы Бернсайда в теории групп, проблемы С. Банаха в функциональном анализе и т.п.

« Распространенное мнение, что с возрастанием расстояния мы выигрываем в «исторической перспективе», по-моему, совершенно не соответствует фактическому положению вещей. Мы выигрываем только в самонадеянности, с какой мы делаем обобщения, на которые бы никогда не осмелились, если бы имели доступ к реальному богатству современных свидетельств». О. Нейгебауэр

1.2. Основные этапы развития математики.

Историю математики нельзя рассматривать в отрыве истории развития философии и науки в целом, ибо все эти три интеллектуальных познания тесно связаны между собой и оказывают влияние друг на друга, как во времена Древнего мира, так и в Новое время. В силу сказанного для полноты изложения и удобства чтения мы будем иногда обращаться к истории философии и науки.

При историческом рассмотрении развития математики необходимо как можно в большей степени отвлечься от современного понимания математики, и попытаться посмотреть на развитие математики в соответствующий период ее развития глазами математика того времени. Это часто трудно сделать.

Во-первых, для этого необходимо ломать сложившиеся в результате школьного воспитания и университетского образования традиционные взгляды не только на историю развития математики, но также и на ее содержание. *Во-вторых*, история любой науки, в том числе и математики, обросла многими легендами, мифами, которые сегодня многими воспринимаются за ту действительность, которая существовала в описываемое историками время. *В-третьих*, современные математические язык и символика, которые знакомы как авторам, так и читателям, принципиально отличаются от математического языка и его символики, которые существовали в описываемый исторический период. Сам перевод с более раннего математического языка на современный математический язык содержит в себе возможность искажения первоначального математического содержания. Искажения возникают, в частности, в результате предписывания исследуемым авторам определенных мыслей, которые и не могли возникнуть в их сознании, а понятиям содержания, которых у них не могло принципиально существовать. В качестве примера можно привести богатые содержанием широко известные книги по истории математики, такие, как Ван дер Варден (1), О. Нейгебауэр (1), «История математики» (1), на которые мы ниже будем ссылаться. Упомянутые выше проблемы сродни с проблемами, с которыми сталкивается переводчик литературных произведений с одного языка на другой. Примером таких проблем могут послужить проблемы, возникающие при переводе Ф. Рабле со старофранцузского языка на современный французский язык.

Содержание и смысл математических понятий менялись с течением временем. Поэтому то, что мы сегодня понимаем под тем или иным математическим термином или понятием, очень часто не соответствует тому, что понимал под этим понятием математик, живший за несколько веков до нашего времени. Вполне возможно, что существует определенная связь между этими двумя пониманиями, которая часто основана на некоторой аналогии, но гораздо чаще эта связь является плодом желания историка «построить мост» между двумя историческими периодами. В качестве примера можно привести Птолемея, которому приписывается открытие тригонометрии, потому что он использовал некие понятия, которые после многовекового развития привели к современным тригонометрическим функциям. Тригонометрические функции являются математическими понятиями, которые в современном понимании появились только в XVIII веке.

Так как история математика развивалась на фоне общего исторического развития науки, то эту историю можно аналогично разделить на три периода. Эти исторические периоды определяются интеллектуальными революциями, которые происходили в начале этих периодов и которые изменяли цели и методологию математических исследований в рамках методологии всей науки.

Первый период развития математики начался с момента возникновения математики в результате первой интеллектуальной революции как научной дисциплины в VII – VI веках до н.э. в древней Греции и продолжался до начала XVII века. Этот период, длиной более двух тысяч лет, можно условно назвать *греческим*, ибо греки создали математику, и влияние греческой математической методологии в течение первого периода было решающим.

Ту область знаний, которая существовала до математики и которая занималась количественным решением практических задач, будем называть *прематематикой.* В литературе иногда используют в указанном смысле термин «предматематика». Так как в термине «предматематика» заложена коннотация, как будто с появлением математики предматематика исчезает, вливается в математику (с чем мы, в общем случае, не согласны), то мы предпочитаем использовать термин «прематематика».

Греки совершили уникальный интеллектуальный подвиг в процессе первой интеллектуальной революции, создав одновременно интеллектуальную тройку: философию, математику и физику. Интеллектуальные составляющие этой тройки оказали решающее интеллектуальное влияние на развитие человеческой цивилизации в разные последующие исторические отрезки. Так в греческий период развития решающую роль в развитии европейской цивилизации сыграла греческая философия, которая стала одной из основ, из которой выросла христианская цивилизация и, по существу, значительная часть духовной сути европейской цивилизации. Это утверждение нисколько не умаляет роль математики и физики в интеллектуальной жизни человечества, но все же в тот исторический период *только* греческая философия оказала принципиальное историческое влияние на все дальнейшее развитие человечества, ибо только она выжила после исчезновения греческой цивилизации. Это выживание связано с тем, что только греческая философия «вышла» за стены греческих школ и академий и оказала большое влияние на возникновение и развитие христианской теологии. Результатом этого вживания греческой философии в христианскую теологию и было воскрешение к жизни уже мертвых к тому времени математики и физики.

Поэтому в греческий период саму математику можно было скорее рассматривать как составную часть всей греческой интеллектуальной культуры, которая включала в себя также греческое искусство, греческую философию, физику, различные виды интеллектуального спорта и т.п. В этом качестве математика служила образцом интеллектуальной красоты и гармонии. Греческая математика не имела никакой связи с решением практических задач, т.е. с прематематикой, которая у греков называлась *логистикой* и которая развивалась сама по себе, ведомая потребностями экономического и технологического развития этой цивилизации.

С исчезновением греческой цивилизации греческая культура, в том числе и математика, сохранилась, в основном, в книгах. С помощью книг, посвященных различным аспектам греческой культуры, в средние века с ней ознакомились и другие народы: индийцы, арабы, европейцы. Несмотря на ряд блестящих находок (например, десятичная позиционная система представления чисел), все же основное достижение индийцев и арабов в математике было то, что они сохранили и передали греческую математику в книгах европейцам. Европейцы не только ознакомились и усвоили математические знания, накопленные другими народами, но и овладели, в отличие от индийцев и арабов, дедуктивным методом проведения математических доказательств.

Интеллектуальное и технологическое развитие западноевропейцев к началу XVII века достигло такого уровня, что интеллектуальные рамки греческой физики и математики стали для них узкими, и они были вынуждены выйти далеко за них. В XVII веке в интеллектуальной жизни Европы произошла вторая интеллектуальная революция, которая началась с философии, а затем захватила физику и математику и которая ознаменовала конец первого, греческого исторического периода развития математики и начало нового, *европейского*, периода развития математики. Этот период продолжался три с половиной столетия и закончился во второй трети XX века.

Интеллектуальная революция XVII века «переработала» греческую интеллектуальную троицу в европейскую интеллектуальную троицу, состоящую из европейской философии, европейской математики и европейской физики. Однако эта революция по-другому расставила ударения в этой тройке. Решающую роль в этот период стала играть, прежде всего, европейская физика, которая послужила основой для *технологического* развития Европы, а затем и всего мира. Европейская физика была первой из этой троицы, которая «вышла» за стены университетов и академий и оказала решающее влияние на развитие всех отраслей промышленности, транспорта и связи. Европейская философия и европейская математика отошли, в определенном смысле, на второй план: европейская философия осталась жить за стенами монастырей, университетов и академий; европейская математика только благодаря физике начала выходить за стены учебных заведений во второй половине XIX столетия.

Вторая интеллектуальная революция, прежде всего, изменила цели науки и вместе с ней и цели математики. Если греческая наука ставила своей целью объяснить естественные явления, то европейская наука поставила своей целью описание этих явлений. Языком этого описания и служила математика. Иначе говоря, если греческая математика была, по своей сути, видом интеллектуального искусства, то европейская теоретическая математика стала прикладной наукой, которая стала служить сначала языком теоретической физики (естествознания), а затем и языком политической экономии и других конкретных теоретических наук. Математика, которая до того времени основное внимание уделяла только внутренним математическим задачам, вдруг обратилась к изучению внешних, не связанных с самой математикой, задач. Другими словами, математика изменила направление своих исследований и повернулась лицом к внешнему миру.

В связи с тем, что эта революция привела к появлению двух физик, которые принципиально отличались друг от друга: европейской теоретической физики и экспериментальной физики, - то возникли и две математики: европейская теоретическая математика и европейская прагматическая математика. Теоретическая математика, как мы только что сказали, служила языком теоретической физики, а прагматическая математика разрабатывала методы для обработки результатов измерений (наблюдений), изобретала методы для нахождения универсальных физических постоянных, а также осуществляла вычисления на основании математических формул. Каждая из этих двух математик принципиально отличались от греческой математики, как языком, так и методологией математических исследований. Но эти математики также отличались друг от друга.

Математический анализ, который олицетворял собой новую теоретическую математику, базировался на совершенно новой философии, созданной европейцами, на философии Декарта. Прагматическая математика, как часть европейской прагматической науки, имела своим основанием эмпирическую европейскую философию, идущую от Ф. Бэкона.

Появление и бурное развитие обеих европейских математик не прекратило развитие греческой математики, а только отодвинуло ее несколько в сторону, сделало занятия этой математикой менее модными. В подтверждение этому можно сказать, что на протяжении всего второго периода многие математики занимались решением математических задач, которые являлись характерными для греческой математики. Здесь были получен ряд блестящих результатов, которые можно отнести к выдающимся произведениям интеллектуального искусства.

Уже в первой трети XIX века европейская теоретическая математика стала испытывать серию внутренних кризисов, которые были связаны с различными аспектами оснований математики. Если первые кризисы удалось математике счастливо пережить, то в конце второго периода, т.е. в первой трети XX века, возникли такие глубокие кризисы, связанные с методологическими внутренними проблемами обоснования математики, которые привели к определенному методологическому расколу на несколько различных течений. Если в начале второго периода, в XVII веке, европейская теоретическая математика являлась языком теоретической науки (физики), то к началу XX века обнаружилась недостаточность языка и методологии существующей европейской математики для дальнейшего развития европейской теоретической науки, которая к этому времени расширилась и включала в себя политическую экономию. Более того, сама теоретическая математика разделилась на две части: на прикладную теоретическую математику и на чистую математику. Если прикладная математика являлась языком теоретической науки, то чистая математика представляла собой, по своей сути, род интеллектуального искусства.

Европейская прагматическая математика, которая появилась на свет одновременно с европейской теоретической математикой, бурно развивалась весь второй исторический период, обслуживая в конце этого периода не только экспериментальную физику и другие экспериментальные науки, но, главным образом, всевозможные инженерные расчеты. Таким образом, прагматическая математика вышла за стены университетов и академий, в то время как теоретическая математика осталась внутри этих стен.

Третий период развития математики начался во второй трети XX века и продолжается до сих пор. Вторая треть XX века характеризуется революционными изменениями почти во всех областях человеческой деятельности и жизни. В жизни человеческой цивилизации в целом произошли такие крупные события, которых она не только не знала, но и не предполагала. Всемирный экономический кризис, Вторая мировая война, закончившаяся атомной бомбардировкой, распад колониальных империй, холодная война, атомное оружие и связанный с ним ядерный шантаж, холодная война, выход на мировую арену новых принципиальных игроков и т.д. и т.п. Произошел ряд революций в промышленных технологиях, что позволило обогатить и облегчить повседневную жизнь человека с помощью новых технических средств, создав при этом и средства быстрого уничтожения человечества. Человечество существенно раздвинуло границы своего потребления не только в старых направлениях, но и добавило значительное число новых направлений. Социальные, политические и промышленные изменения в жизни человеческой цивилизации потребовали новой организации в экономической и социальной сферах ее управления. Эти события и изменения не могли обойти стороной науку. Они и само развитие науки вызвали революционные изменения и в целях и методологии научных исследований.

Новая интеллектуальная революция поставила во главу научного развития проблемы управления различными сложными системами, как промышленными, так и социально-экономическими. Специфика возникших проблем заставила человеческий интеллект искать решение задач, которые возникли при управлении сложными системами различной природы. Одной из характерных черт этой деятельности является прогнозирование последствий принятия управляющих решений. Как выяснилось, решение прогнозных задач в большинстве случаев базируется на использовании математических моделей. В этом случае мы видим изменение целей математики: если ранее целью использования математических моделей было *описание* физических явлений, то теперь целью математического моделирования стала *прогнозирование* последствий принятия тех или иных решений.

Математическое моделирование характеризуется тем, что процесс его проведения часто требует выполнения больших количеств вычисления. Проведения такого количества вычислений стало возможным только благодаря появлению и использованию компьютеров. Решения математических задач с помощью компьютеров потребовало средств «перевода» этих задач с математического языка на язык компьютеров. Так появилось программирование и вместе с ним и новый тип математики – *компьютерная математика.*

Изменение целей математического моделирования потребовало и изменения методологии математики, а в какой-то мере и сути существовавшей до сих пор математики. Другими словами, возникла новая математика, отличная как от греческой математики, так и от европейской математики. Эту математику будем условно называть *мировой* математикой. Сразу отметим, что как европейская математика, так и греческая математика продолжали существовать, но с точки зрения широкой общественности они отошли на второй план. Если греческая математика была, как часть греческой философии, обращена к *духовности*, *к интеллекту человека*, европейская математика, как язык европейской физики, была обращена к *технологии*, то мировая математика, как средство для обоснования решений, обращена к *управлению,* т.е. к самому человеческому обществу. На эти три математики можно посмотреть и с другой стороны. Если греческая математика была обращена к человеку, европейская математика – к природе, то мировая математика – ко всей человеческой цивилизации в целом.

Человеческая цивилизация могла, в общем случае, обойтись без греческой математики, о чем свидетельствует развитие человечества в средние века. Но уже возникновение и развитие европейской математики оказали значительное влияние на человеческую цивилизацию, дав возможность осуществить технологический прогресс человечества, став тем самым необходимой частью этого прогресса. Возникновение и развитие мировой науки и компьютерной математики позволило и позволяет человечеству избежать ряда социальных, экономических и технических катастроф, став необходимыми составляющими частями экономического и социального прогресса человеческого общества.

Каждый из выделенных выше трех периодов развития математики, таким образом, характеризуется разными глобальными целями проведения математических исследований, принципиальными различиями в методологии, а также появлением новых математических средств и изменением математического языка. Эти различия свидетельствуют о том, что в результате каждой из интеллектуальных революций возникают новые типы математики. Таким образом, любой исторический очерк развития математической методологии, наряду с историческими фактами, должен содержать описание отличительных и характерных черт каждого из типов математики в отдельности.

Для того чтобы описать различия между различными типами математики, необходим специфический язык, который бы позволил сравнить между собой эти типы математической методологии, выделив их общие черты. Этот язык не может быть математическим языком, ибо в этом случае он будет принадлежать к одному из типов математик и поэтому не может служить для сравнения между разными типами. По своему назначению этот язык должен принадлежать области знаний, которая лежит вне математики и описывает свойства, присущие науке. Такой областью знаний является теория познания, которая является одним из разделов философии.

1.3. Несколько слов о теории познания.

«Отыскание истины должно быть целью нашей деятельности; это - единственная цель, которая достойна ее».

А. Пуанкаре

«Все, что не есть мысль, есть чистое ничто, ибо мы не можем мыслить ничего, кроме мысли, и все слова, которые мы располагаем для разговора о вещах, не могут выражать ничего, кроме мыслей. Поэтому сказать, что существует нечто иное, чем мысль, значило бы высказать утверждение, которое не имеет смысла».

А. Пуанкаре

«Знания в руках невежественного и неумного человека, без преувеличения, становятся чудовищем. Знание многогранно и может быть применено по-разному. У него лицо и голос женщины – олицетворение его красоты. У знания есть крылья, потому что научные открытия распространяются очень быстро, невзирая на границы. Острые и цепкие когти нужны ему для того, чтобы аксиомы и аргументы проникли в человеческое сознание и накрепко удерживались в нем так, чтобы нельзя было от них избавиться. И если они неправильно поняты или использованы, они приносят беспокойство и мучения тем или иным путем, и, в конце концов, просто разрывают сознание на куски».

Ф. Бэкон

«Человек стремится к знанию». Этими словами великий философ Аристотель начинает свою «Метафизику» - один из важнейших интеллектуальных документов древности, в котором резюмируются все основные достижения древних в области методологии науки. Стремление человека к знанию является одним из основных стимулов к познанию окружающего внешнего мира во всех его частях и проявлениях, внутреннего мира человека, а также продуктов его интеллектуальной деятельности. Человеческая любознательность является природным свойством человека, без обладания которым он вряд ли смог выжить и существовать в жестоких условиях внешнего мира. Накопление знаний является необходимым элементом человеческой жизни. Процесс получения знаний будем называть *познанием*.

Человеческие знания имеют два источника знаний. Первым источником знаний является практическая повседневная деятельность человека. Знания, которые человек приобретает таким путем, будем назвать *прагматическими знаниями*. Вторым источником знаний является человеческий интеллект, или человеческое сознание. Знания, полученные на этом пути, будем называть *интеллектуальными знаниями*.

От прагматических знаний обычно требуют, чтобы они в той иной степени соответствовали действительности. Так как не существует никаких объективных средств для определения степени соответствия этих знаний действительности, то должно существовать общественное согласие в том, что эти знания можно использовать при решении практических задач. В частности, в древнеегипетских папирусах описываются общепринятые (или установленные двором фараона) методики решения практических задач.

Требования, предъявляемые к интеллектуальным знаниям, принципиально отличаются от требований, предъявляемых к прагматическим знаниям. От этих знаний требуется, чтобы они были «истинными». Понятие «истинность утверждения» или «истина» является первичным понятием, описание содержания которого затруднено. У человека обычно это понятие связано с воспитанием, принятыми в соответствующем обществе нормами, с религией, с утверждениями харизматических личностей и т.п. К понятию «истина» человек относится с определенным уважением, о чем свидетельствуют следующие слова Аристотеля:

«А по общему признанию созерцание истины есть самая приятная из всех деятельностей, сообразных с добродетелью».

Человечество с ранних пор занималось поисками истин, с помощью которых оно пыталось понять окружающий мир. Обычно этот поиск проводился в рамках той или иной религии или мистического учения. Только в VII-VI вв. до н.э. в Греции, Индии и Китае были сделаны попытки понять окружающий мир не с позиции религии, а в рамках так называемых «философий». Все наши дальнейшие рассмотрения мы будем проводить только в рамках греческой философии. Поэтому, говоря о философии, мы будем иметь в виду греческую философию.

Прежде чем перейти к теории познания, охарактеризуем в общих словах философию. Философия, с которой мы имеем дело в этой книге, представляет собой один из видов мышления. Чтобы отличить философию от ранее возникшего религиозного мышления, теологии, говорят, что этот вид мышления является *рациональным*. Рациональность этого мышления, в частности, выражается в том, что для объяснения тех или иных реальных (внешних по отношению к сознанию человека) явлений стремятся использовать понятия, не имеющих религиозного или мистического содержания.

В разное время и разные философы определяли суть и задачи философии. Известный математик и философ XX века Б. Рассел писал:

«Философия, как я буду понимать это слово, является чем-то промежуточным между теологией и наукой. Подобно теологии, она состоит в спекуляциях по поводу предметов, относительно которых точное знание оказывалось до сих пор недостижимым; но, подобно науке, она взывает скорее к человеческому разуму, чем к авторитету, будь то авторитет традиции или откровения. Все *точные* знания, по моему мнению, принадлежат науке, все *догмы*, поскольку они превышают точное знание, принадлежат теологии. Но между наукой и теологией имеется Ничья Земля, подвергающаяся атакам с обеих сторон; эта Ничья Земля и есть философия. Почти все вопросы, которые интересуют спекулятивные умы, таковы, что наука на них не может ответить, а самоуверенные ответы теологов более не кажутся столь убедительными, как в предшествующее столетие. Разделен ли мир на дух и материю, а если да, то, что такое дух и что такое материя? Подчинен ли дух материи или он обладает независимыми способностями? Имеет ли вселенная какое либо единство или цель? Развивается ли вселенная по направлению к какой-нибудь цели? Действительно ли существуют законы природы или мы просто верим в них благодаря присущей нам склонности к порядку? Является ли человек тем, чем он кажется астроному, - крошечным комочком смеси углерода и воды, бессильно копошащимся на маленькой и второстепенной планете? Или же человек является тем, чем он представлялся Гамлету? А может быть, он является тем и другим одновременно? Существует ли возвышенный и низменный образ жизни или все образы жизни являются только тщетой? Если же существует образ жизни, который является возвышенным, то в чем он состоит, и как его мы можем достичь? Нужно ли добру быть вечным, чтобы заслужить высокой оценки, или же к добру нужно стремиться, даже если вселенная неотвратимо движется к гибели? Существует ли такая вещь, как мудрость, или же то, что представляется таковой, - просто максимально рафинированная глупость? На такие вопросы нельзя найти ответа в лаборатории. Теологи претендовали на то, чтобы дать на эти вопросы ответы и притом весьма определенные, но сама определенность их ответов заставляет современные умы относиться к ним с подозрением. Исследовать эти вопросы, если не отвечать на них, - дело философии». (Б. Рассел (1), стр.8)

Для того чтобы выполнить поставленные перед философией задачи, необходимо было разработать язык, на котором философы, а также специально подготовленные люди могли общаться между собой. Этот язык стал необходим для изложения методов и результатов исследования в заданных направлениях. Язык философии был создан на базе обычного языка человеческого общения с добавлением набора слов-понятий, в который был вложен определенный смысл, понятный всем или значительной части занимающихся философией.

Однако при определении понятий философы столкнулись с тем, что нельзя бесконечно определять одни понятия через другие. В случае, когда все понятия определяемы друг через друга, обязательно приходим или к тавтологиям (к заменам одних слов другими, без изменения вложенного в них содержания), или к бесконечным последовательностям понятий, что резко затрудняет понимание этих понятий и мешает плодотворному общению между заинтересованными лицами. Это привело к тому, что философы, по соглашению, стали использовать понятия, которым в рамках той или иной теории не стали давать определения. Другими словами, философы стали использовать так называемые *неопределяемые* понятия.

Неопределяемые понятия в языке обычно называют *первичными понятиями*. Смысл первичных понятий считается интуитивно понятным для посвященных. Понятия, которые определяются через первичные понятия, называются *вторичными* или *определяемыми* понятиями. Выбор набора первичных понятий всегда субъективен и не является однозначным: то, что для одного исследователя является первичным понятием, то для другого может быть вторичным понятием. Даже более того, в зависимости от целей исследования одно и то же понятие может быть использовано у одного и того же философа то, как первичное понятие, то, как вторичное понятие. Но все же в рамках одного и того же исследования или даже в рамках одной и той же теории обычно ясно указывается, какие понятия в этих рамках считаются первичными и какое содержание интуитивно вкладывается в эти понятия.

В качестве примера часто встречающихся первичных философских понятий можно привести такие понятия как познание, мысль, красота, единое (целое) и т.п. Основное внимание в этом параграфе мы уделим понятию «познание».

Сам термин «познание» является понятием, в которое вкладывается различное содержание. Ниже под познанием мы будем понимать целенаправленную человеческую деятельность, целью которой является получение знаний. Исходя из этого интуитивного определения, можно выделить два момента. Первый момент заключается в том, что любое познание представляет собой процесс, результаты которого принадлежат определенному человеческому сообществу. Другими словами, познание имеет *общественный характер,* т.е. *без присутствия некоторого человеческого сообщества нет познания*. Отсюда следует вывод, что *познание есть часть интеллектуального общения между людьми*.

Второй момент заключается в том, что познание – это разновидность индивидуальной интеллектуальной деятельности человека. Из этого положения, в свою очередь, мы можем сделать два вывода. Первый вывод – это то, что познание является целенаправленной деятельностью, а второй – это то, что эта деятельность связана с сознанием индивидуума.

Наше дальнейшее рассмотрение понятия «познание» основывается на двух базисных утверждениях. Первое утверждение можно выразить следующим образом: *любое человеческое познание происходит в сознании человека*. Второе утверждение заключается в том, что *любое познание имеет два источника: чувственные ощущения и интеллектуальную деятельность*. Обсудим эти базисные утверждения.

Первое утверждение связано с самой сущностью существования человека. Человек, с одной стороны, существует (внешнее существование) во внешнем мире, который простирается вне него и изменяется во времени. С другой стороны, человек существует в своем сознании (внутреннее существование), переживая тем или иным способом каждый миг своей жизни. Он может создать свой внутренний интеллектуальный мир, в котором он может проводить (существовать) значительную часть своей жизни. (Подобная ситуация является характерной для творчески работающих математиков, которые значительную часть своего времени, отличного от сна (а иногда и часть своего сна), проводит в созданном им математическом мире, состоящим из математических объектов). Поэтому человеку приходится в каждый момент времени связывать между собой эти два типа существования, что естественным образом сказывается на его способности к познанию.

По своей сути процесс познания и его результаты носят *индивидуальный характер*, т.е. сам процесс познания является индивидуальным, а его результаты, т.е. знания, являются, прежде всего, индивидуальной собственностью. Они *могут* стать общественной знаниями только в том случае, когда индивидуум согласен на это, т.е. готов сообщить о них другим людям. Для человеческой цивилизации только те знания представляют основной интерес, которые являются общественными знаниями. Естественно, рассматривать общественные знания как общественную собственность.
Отсюда непосредственно вытекает, что знания имеют *относительный характер*, в том смысле, что только определенная часть человеческого сообщества может понять содержание сообщения, притом только часть уже из этих людей может согласиться с его содержанием. Другими словами, *нет абсолютных знаний* в том смысле, что все члены определенного человеческого сообщества согласны с предложенным содержанием знаний.

Само существование конкретного общественного знания зависит от существования группы людей, для которых они являются индивидуальными знаниями. Если такой группы не существует, или такая группа людей прекратила свое существование, то и знания пропадают. В качестве примера можно привести пропавшие знания исчезнувших человеческих цивилизаций. Это означает, что *все знания носят временный характер*.

Здесь необходимо отметить, что слово «знание», которое мы применили по отношению к тому, что было получено в наследство от исчезнувших цивилизаций, требует определенного пояснения. То, что досталось от исчезнувших цивилизаций, возможно, и были знаниями во время существования тех цивилизаций. Сегодня их можно рассматривать только в качестве исторических сообщений, в чем и заключается их ценность. Более того, в то историческое сообщение, которое ранее было знанием, при современном озвучивании может быть вложено содержание, которое не могло существовать в ту отдаленную историческую эпоху. Это новое содержание, по сути, искажает то содержание, которое исторически существовало в соответствующую эпоху. Иллюстрацией к сказанному служат многие историко-математические исследования, о которых мы будем говорить ниже. Резюмируя вышесказанное, мы можем определить *знание как некое истинное утверждение в рамках определенного познания.*

Из вышесказанного следует, что для существования любого познания необходим хотя бы один общественный язык, на котором выражаются, передаются и хранятся результаты этого познания. Другими словами, с любым познанием неразрывно связан хотя бы один общественный язык, который мы будем называть *языком познания*.

Из первого базисного утверждения, по существу, вытекает второе базисное утверждение о двух источниках познания.

Первый источник познания – это человеческие ощущения. Эти ощущения возникают при взаимодействии с внешнем миром и с его отдельными частями, а также с внутренним миром, включающим как психологическое, так и физическое состояния человека. Это взаимодействие со стороны человека заключается в том, что внешний и внутренний мир воздействует на органы чувств человека, что, в конечном счете, находит свое отражение в сознании человека. Другими словами, воздействие некоторого объекта на чувства человека выражается в том, что в мозгу человека создается индивидуальный чувственный образ этого объекта. Взаимоотношение между реальным объектом и его представлениями в сознании человека составляло и составляет один из фундаментальных вопросов, которыми занималась философия с древних времен и до настоящего времени.

Вторым источником познания является интеллектуальная деятельность человека, которая заключается в размышлениях и рассуждениях. Это означает, что познание может происходить и без всякой связи с человеческими ощущениями.

Так как познание является целенаправленной деятельностью для получения знаний, то необходимо объяснить, какое содержание вкладывается в понятие знания, а также описать, хотя бы в общих словах, метод (способ) получения знаний. Любое знание представляет собой утверждение на некотором общественном языке, который служит языком познания. Однако не каждое утверждение в этом языке является знанием. Обычно, чтобы утверждение было признано знанием в рамках некоторого познания, требуются от этого утверждение быть «истиной». Другими словами, знание – это истинное утверждение в рамках некоторого познания.

В определенном смысле, мы здесь сталкиваемся с тавтологией: понятия «знание» и «истина» выступают как синонимы. Наше определение знания звучит как нечто, несущее информацию, только потому, что слова «истинное утверждение» звучит как интуитивно понятное, хотя, как мы увидим ниже, в этом случае трудно доверять только интуиции. Чтобы разорвать эту тавтологию мы должны в каждом конкретном познании определить, что мы понимаем под словами «истинное утверждение».

Каждому познанию присущ и свой способ (механизм) получения истинных утверждений, т.е. знаний. Этот механизм получения знаний из других знаний мы будем называть *логикой этого познания*. Само понятие «логика» было введено греками, которое толковалось как «наука о рассуждениях», «искусство рассуждений». Нечто подобное было и других народов, которые независимо друг от друга вырабатывали правила организации общественного мышления, а также проведения дискуссий. Среди современных толкований этого понятия можно выделить следующие толкования. Во-первых, логика – наука о формах, методах и законах интеллектуальной познавательной деятельности, формализуемых с помощью формального языка. Во-вторых, логика – это наука о достижении истины в процессе познания с помощью выводного знания, т.е. знания полученного опосредственным путем, посредством не чувственного опыта, а из знаний, полученных ранее. И, в-третьих, логика – это наука о мышлении. Мы в этой работе несколько расширили понятие «логика» по сравнению с первыми двумя определении, а по сравнению с третьим определением – сузили это понятие.

Ниже, при характеристике различных типов познаний мы будем указывать дополнительно специфические черты логики, связанной с этим типом познания.
Нас в рамках данной работы будут интересовать только определенные типы познаний. Чтобы выделить эти познания, задаются определенные критерии, с помощью которых мы можем один тип познания отделить от другого. Один из таких критериев мы уже встретили выше. Он состоял в различии источников познания. В зависимости оттого, что является источником познания, человеческие ощущения или интеллект, все познания можно разделить на два множества: *чувственные познания* и *интеллектуальные* познания. Чувственное познание иногда называют *апостериорным* (т.е. на основе предшествующего опыта) познанием, ибо оно основано на эмпирических знаниях, в то время как интеллектуальное познание называют *априорным* (т.е. независимо от опыта и до него) познанием, знания которого не основаны ни на чувственных ощущениях, ни на предыдущем опыте.

Второй критерий различает познания в зависимости от целенаправленности их деятельности. Любое познание является целенаправленной человеческой деятельностью, т.е. оно производится с определенной целью. Эта цель может быть либо четко сформулирована, либо ощущается через определенное неосознанное стремление. Другими словами, познание всегда направлено на изучение чего-то. Теперь выделим два направления в познаниях. Первое направление заключается в том, что познание неразрывно связано с решением практической задачи (проблемы). В этом случае любое такое познание будем называть *прагматическим познанием*. Прагматическое познание всегда стимулируется внешними по отношению к человеку причинами и побуждениями. Второе направление связано с тем, что познание стимулируется познавательной способностью человека, т.е. внутренними потребностями (психологическими и психическими) человека. Познание, вызванное внутренними потребностями человека, будем называть *интеллектуальным познанием*.

Третий критерий связан с типом логики, связанной с тем или иным познанием. Здесь мы можем выделить две широко встречающихся логики: дедуктивная логика и индуктивная логика. Поэтому познание, использующее дедуктивную логику, будем называть *дедуктивным познанием*, а познание, использующее индуктивную логику, - *индуктивным познанием*.

Математика, как мы уже неоднократно упоминали выше, при своем рождении была тесно связана с философией. Позже эта связь существенно ослабла, но в той или иной мере продолжала существовать. Содержание и цели математики менялись со временем, наслаивались одни на другие. В современной математике существуют целые пласты, принадлежащие разным периодам развития науки. Более того, часто возникающие новые математические дисциплины повторяют путь, который прошли более «старые» дисциплины. Поэтому для того, чтобы сформулировать, что мы понимаем под математикой, под ее содержанием, мы вынуждены рассмотреть историю возникновения и развития математических наук. Естественно, что на развитие математики оказывает влияние и развитие общего понятия науки.

При употреблении слова «математика» мы сталкиваемся с определенной двойственностью. С одной стороны, математика рассматривается как некоторый единый объект, который обладает определенными свойствами и который можно изучать в целом. В этом смысле понятие «математика» скорее относится к философским понятиям, т.е. является интеллектуальным объектом. Для того чтобы изучить в этом смысле понятие математики, необходимо обратиться к теории познания, чему и будет посвящена значительная часть настоящей главы. Кроме того, в современном мире математику также рассматривают как отрасль экономики, т.е. как реальный объект, существующий вне человеческого сознания, ибо математики участвуют в экономической деятельности, получая за нее заработную плату. Этот аспект понятия математики представляет собой предмет изучения экономической науки, и нас он будет интересовать в незначительной степени.

С другой стороны, понятие «математика» является собирательным понятием, т.е. математика представляет собой совокупность конкретных научных дисциплин. Следовательно, любое изучение понятия «математика» будет связано с выделением тех свойств математических дисциплин, которые являются общими для всех дисциплин, для чего, необходимо, тем или иным способом охарактеризовать каждую конкретную дисциплину в отдельности.

Таким образом, для исследования содержания понятия математики в целом мы должны рассмотреть эти два аспекта этого понятия, ибо эти аспекты тесно связаны друг с другом. С одной стороны, мы попытаемся описать то содержание, которое мы вкладываем в понятие «математика», а с другой стороны, рассмотрим вопрос об отделении математики от нематематики.

«Имеется много книг, изображающих жизнь первобытного человека. Среди них есть, например, книги, описывающие, «как человек без кузнеца жил», иными словами, как жил человек, не знающий употребления металлов. Когда-то была объявлена премия для написания книги «Как человек без числа жил». Однако премия оказалась невыданной: по-видимому, ни один исследователь-писатель не был в состоянии изобразить жизнь человека, не имеющего никакого понятия о числах».

И. Депман

Глава 2. Прематематика.

2.1. Общие замечания

Хозяйственная жизнь любой человеческой цивилизации состоит из повседневных практических задач, связанных с измерениями тех или иных количеств. Трудно представить себе существование человеческой цивилизации без использования результатов этих измерений. Измерение – это действие, характеризующее существование любой человеческой группы, подобное речи. Можно выделить два типа количеств, которые подвергаются измерению. *Во-первых*, измеряют количество объектов в множестве объектов. Например, измеряется количество голов скота в стаде, количество людей в той или иной группе и т.п. *Во-вторых*, измеряют степень обладания объектом тем или иным свойством. Например, измеряют размеры дома, высоту того или иного предмета, расстояние между двумя селениями и т.п.

Для измерения количеств необходимо иметь меру (единицу измерения) этого количества и способ измерения. Таким образом, результат измерения всегда является сочетанием двух элементов: один элемент представляет собой имя единицы измерения, а второй – количество единиц. Если говорить современным языком, то результат измерения есть ***именованное число***.

В рамках каждой из существовавших и существующих цивилизаций человек был вынужден и привык решать различные практические задачи. Основным способом решения этих задач является метод проб и ошибок, т.е. путь, основанный на опыте. Найденные методики решения практических задач и составляют набор знаний, принадлежащий данной цивилизации. Эти знания передаются в ней от поколения к поколению. Если же она не была связана с другими цивилизациями, то с ее гибелью эти знания исчезают. Примеры, подтверждающие этот тезис, легко можно найти в истории различных исчезнувших цивилизаций. Набор методик решения количественных практических задач можно условно назвать ***прематематикой***.

Отметим сразу, что математику очень часто путают с прематематикой. Это связано с тем, что в исторической математической литературе под математикой обычно понимают все, что связано с числами и геометрическими фигурами. Ниже мы постараемся обосновать тезис, утверждающий, что необходимо отличать математику от прематематики. Это обоснование будем проводить двумя путями. Первый путь посвящен историческому анализу развития математической методологии. Другой путь дает теория познания, которая утверждает, что математика и прематематика относятся к различным типам познаний. *Прематематика* представляет собой один из видов *прагматического познания*, в то время как *математика* есть определенный вид *интеллектуального познания.* Принципиальные отличия интеллектуального познания от прагматического и определяют, чем отличается математика от прематематики. Эти отличия ясно видны при рассмотрении объектов исследования прематематики и математики, а также в способе проведения рассуждений в их рамках.

Развитие прематематики и математики в истории часто пересекались, оказывая влияние друг на друга, как мы увидим ниже. Поэтому изложение исторического развития математики мы будем сопровождать описанием исторического развития прематематики, включая процесс ее перерождения в так называемую прагматическую математику. Так как математика возникла относительно недавно, по сравнению с прематематикой, то наш исторический очерк мы начнем с нескольких замечаний относительно развития прематематики в древних цивилизациях.

Обсуждение проблем, связанных с прематематикой, сталкивается с рядом трудностей, и прежде всего с тем, что мы с высоты XX – XXI веков н.э. обсуждаем интеллектуальные события, происходившие многие тысячелетия и столетия тому назад. Это обсуждение, как уже отмечалось выше, мы ведем на современном языке на основе нашего многолетнего воспитания и образования, которые привили нам определенные взгляды на прошлое.

Сложившиеся взгляды и представления о прошлом часто мешают нам правильно оценить те интеллектуальные и практические знания, которые были накоплены древними цивилизациями. Наши знания о прошлом, которые мы получили в результате образования, связаны с определенными рамками общепринятых в современном обществе теорий, которые формулируются на современном же языке. Наше образование и воспитание часто искажает картину действительности, существовавшей в определенный исторический период. Поэтому в современной исторической литературе можно найти много мифов, которые путешествуют из книги в книгу.

В частности, использовать в исторической литературе понятие «математика» применительно к догреческим цивилизациям вряд ли правомерно, ибо оно возникло в более поздний период и относилось к совершенно другой области знаний, которая просто не могла существовать в этих цивилизациях. Иногда вместо слова «математика» по отношению к этим цивилизациям мы можем встретить слово «проматематика», но это уже достижение последней четверти XX столетия.

Ниже мы приведем еще несколько других исторических мифов, связанных с прематематикой и математикой. Начнем с мифа, который касается одного из самых важных математических понятий. Суть этого мифа заключается в утверждении того, что прематематика и математика оперируют одними и теми же объектами, которые известны как числа. Однако на самом деле математика и прематематика, как мы это покажем ниже, оперируют принципиально разными объектами, которые мы будем называть «математическими числами» и «прематематическими числами». Введение этих понятий позволяет разделить объекты исследования указанных двух видов познания.

В прематематике мы можем выделить два типа прематематических объектов: прематематические геометрические объекты и прематематические числа. Прематематические объекты принципиально отличаются от аналогичных понятий, встречающихся в математических исследованиях. Подробному обсуждению прематематических объектов и описанию их свойств будет посвящен следующий параграф. Здесь же мы просто подчеркнем их отличие от аналогичных математических объектов.

Под *прематематическими геометрическими объектами* мы понимаем *конкретные* реальные объекты, имеющие определенную геометрическую форму. Здесь мы встречаем реальные объекты, имеющие форму квадратов, прямоугольников, треугольников, трапеций, цилиндров и т.д. Практически все встречающиеся в письменных документах догреческих цивилизаций задачи, в которых говорится о прематематических геометрических фигурах, посвящены поиску площадей или объемов этих фигур, связанных с конкретными практическими нуждами. Иначе говоря, все известные задачи имеют чисто практическую направленность. В них нельзя встретить ни одной абстрактной мысли или абстрактных понятий, которые не имеют практической направленности. Поэтому в этих задачах не упоминаются такие понятия, как диагональ, медиана, биссектриса и другие, которые широко используются в математической геометрии.

Прематематические числа, в отличие от прематематических геометрических объектов, носят более абстрактный характер. Именно они являются объектами в большинстве дошедших до нас практических задач, решением которых занимались древние. По своей природе, как мы уже говорили выше, они неразрывно связаны или с измерением количества объектов в некотором конкретном множестве реальных объектов, или с измерением степени обладания объектом определенным свойством. Математические же числа никоим образом не связаны с измерением.

В практике достаточно часто встречаются термины, которые обозначают доли от целого множества. Например, половина стада или четверть поля. Эти объекты также можно рассматривать как прематематические числа, но уже другого сорта. В исторической математической литературе принято их называть дробями. Однако использование термина «дроби» приводит обычно к смешиванию двух совершенно различных по своей природе объектов: долей конкретного множества и математических абстрактных объектов.

Понятия математического числа и прематематического числа являются первичными. Поэтому мы не можем дать определения этих понятий, а можем только описать содержание, которое вкладывается в эти понятия. Мы начнем их описание с понятия прематематического числа. Описание содержания, которое вкладывали древние греки в понятие натурального числа, мы приведем и обсудим в следующей главе.

2.2. Прематематические числа

Как мы уже неоднократно отмечали, прематематика возникла на заре человеческих цивилизаций в связи с потребностями решать различные практические задачи, в основе которых лежало проведение различного рода количественных (вычислительных) операций. Это легко проследить на примере древних цивилизаций Востока, таких, как вавилонская, египетская и другие. Они оставили после себя значительное количество письменных документов, на основании которых можно судить о развитии прематематики в этих цивилизациях. То, что мы сегодня называем математическим объектом, как, например, математическое число, им не только не было известно, но и не могло быть известным. Это ясно видно как из содержания сохранившихся папирусов, принадлежащих египетской цивилизации, так и из письменных документов, принадлежащих вавилонской цивилизации. В этих документах приводятся только конкретные практические задачи и методики их решения.

Так как прематематика занимается количественным решением практических задач, то она оперирует объектами, которые согласно многовековой традиции называют числами.

Мы будем в этом случае называть их ***prематематическими числами***. При решении практических задач мы сталкиваемся с несколькими их типами.

Наиболее распространенным типом прематематических чисел являются числа, которые возникают при измерении определенных количеств, о чем мы уже говорили в предыдущем параграфе. Результатом измерения всегда являются именованные числа. Другими словами, именованные числа возникли в связи с тем, что они должны были выражать степень обладания так называемой *количественной сущностью* некоторого множества реальных объектов. Количественная сущность представляет собой философскую категорию, которая присуща, в частности, любым совокупностям реальных объектов. Например, количество голов скота в стаде или количество яблок в корзине. Другое проявление количественной сущности мы встречаем, когда пытаемся разделить конкретные реальные объекты по степени обладания определенным свойством. Подобная ситуация возникает, когда мы хотим сравнить два арбуза по весу.

В первом случае количественная сущность проявляется в том, что мы сравниваем две совокупности реальных объектов по количеству реальных объектов, содержащихся в них. В этом случае мы можем сказать, что в одной совокупности количество объектов больше, меньше или одно и то же, чем в другой совокупности. А во втором случае она проявляется в том, что один объект обладает некоторым свойством в большей, меньшей или в той же степени, чем другой объект.

Однако если приходится сравнивать одновременно количества объектов в нескольких множествах, то уже необходимо вводить специальные слова или символы для обозначения различных количеств. Таким образом, мы приходим к тому, что принято называть числами. Для определения, каким количеством обладает то или иное множество, необходимо пересчитать объекты, принадлежащие этому множеству. Понятие «пересчитать объекты» является первичным понятием, и его смысл интуитивно ясен каждому человеку, воспитанному в определенном обществе. Более того, сам процесс пересчета объектов является общественно признанным процессом.

А во втором случае количественная сущность проявляется в том, что при сравнении двух объектов мы можем сказать, что один объект обладает некоторым свойством в большей, меньшей или в той же степени, чем другой объект. В ситуации, когда необходимо сравнивать по степени обладания свойством несколько объектов, мы также приходим к неким числам. Процесс установления соответствия между степенью обладания свойством и определенным числом называется процессом измерения. Он является процессом гораздо более сложным, нежели процесс пересчета, о котором говорилось выше. Процесс измерения является интуитивно понятным процессом, и мы не будем вдаваться в более формальные определения. Важно лишь отметить, что любой процесс измерения характеризуется единицей измерения или эталоном и самим методом проведения измерения. Отметим также, что степень обладания свойством является именованным числом, имя (наименование) которого является именем единицы измерения.

Часто единица измерения является достаточно большой, и поэтому приходится вводить более малую единицу как часть первоначальной, причем новой единице присваивается имя. Например, единицей измерения времени является час, который состоит из 60 минут. В свою очередь, минута состоит из 60 секунд. Таким образом, мы имеем дело с тремя единицами измерения времени: час, минута, секунда.

При наличии нескольких единиц степень обладания определенным свойством может быть выражена числом, в состав которого входит несколько наименований. Например, 2 часа 25 минут 10 секунд. Такое число называется составным именованным числом.

Для простоты изложения мы сосредоточим наше внимание только на вопросах, связанных с измерением количества реальных объектов, содержащихся в совокупностях реальных объектов, ибо рассмотрение составных именованных чисел в методологическом плане не несет в себе ничего нового.

В каждом языке человеческого общения есть специальные слова (термины), которые позволяют различать или измерять разные количества (в русском языке: один, два…, в английском языке: one, two…) с прибавкой имен реальных объектов или имен тех свойств объектов, которые мы измеряем. Для удобства дальнейших рассуждений объекты (сущности), которые выражают количественную сущность, мы назовем *прематематическими к-числами* или *прематематическими количественными именованными числами*. Любое к-число состоит из двух частей: первая часть – это степень обладания количественной сущностью, а вторая – имя объекта или свойства объекта, в зависимости от того, относительно чего рассматривается количественная сущность.

Для обозначения различных количеств в древних цивилизациях применялись определенные символы, которые были характерными для данной цивилизации (см., например, Депман,25). Разные цивилизации использовали различные символы. Среди этих символов можно найти и зарубки на дереве, и клинопись на глиняных дощечках, и иероглифы на папирусе. С падением древних цивилизаций эти символы исчезали.

Из приведенного описания к-чисел следует, что существует неограниченное количество этих чисел. Каждое конкретное прематематическое к-число, выражающее количественную сущность определенной совокупности, можно рассматривать как прематематический объект. Одно и то же к-число приписывается каждой конкретной совокупности реальных объектов, обладающей количественной сущностью в одной и той же степени. Это означает, что мы можем конкретному множеству сопоставить только одно к-число. Любую совокупность, которой приписали конкретное к-число, можно рассматривать как *интерпретацию* или *реализацию* к-числа. Например, количество овец в стаде, количество денег в кармане, глубина ямы и т.д. и т.п.

Еще раз подчеркнем, что *имя любого к-числа состоит из двух слов*: специального слова, означающего степень обладания количественной сущностью, которое для сокращения будем называть *количеством*, и слова, характеризующего все реальные объекты в совокупности, которое в дальнейшем будем называть *наименованием*.

Одним из основных свойств количественной сущности является то, что на множестве всех к-чисел мы можем ввести *порядок*, положив, что одно к-число больше другого к-числа, если степень количественной сущности совокупности реальных объектов, отвечающая первому числу, больше степени количественной сущности совокупности, отвечающей другому числу. Другими словами, все к-числа можно выстроить в последовательность, где меньшее к-число предшествует большему к-числу. Легко видеть, что эта последовательность обладает первым элементом, но не обладает последним элементом. Это означает, что существует наименьшее к-число, но не существует наибольшего к-числа. *Наименьшее к-число соответствует совокупности, состоящей из одного реального объекта*. (Среди к-чисел нет такого объекта, подобного математическому объекту, который в математике обозначается через нуль.)

Отметим, что в письменных источниках, дошедших до нас из ранних человеческих цивилизаций, часто не видно, что писавшие пользуются именованными числами, хотя из содержания самих решаемых задач следует, что все действия производятся над именованными числами. Эту ситуацию можно объяснить тем, что в те времена мало обращали внимание на соответствующее (присущее нашему времени) оформление решения задачи, а стремились скорее получить окончательный результат и описать методику или путь его получения, при этом наличие наименований автоматически подразумевалось.

Количественная сущность принадлежит совокупностям реальных объектов, т.е. является свойством этой совокупности. Естественно видеть в количественной сущности *первичное* свойство, ибо любые попытки определить эту сущность с помощью тех или иных терминов приводят обычно к тавтологии.

Количественная сущность в прематематике встречается в разных видах, которые отличаются друг от друга степенью абстракции или обобщения (формализации). В качестве примера приведем два типа этой сущности. Первый тип возникает, когда мы рассматриваем два различных стада из 20 баранов в каждом. В этом случае мы уже говорим не о *конкретном* стаде баранов, а о различных стадах баранов, обладающих одним и тем же свойством. Здесь мы имеем дело с самой низкой степенью формализации.

Со вторым типом количественной сущности мы сталкиваемся, когда говорим, например, о двух совокупностях, одна из которых является стадом из 20 баранов, а другая – стадом коров из 20 коров. В этом случае эти две совокупности имеют одну и ту же количественную сущность, но эта сущность отличается от предыдущего типа гораздо более высокой степенью формализации. Мы здесь имеем дело с процессом обобщения, присущим любому виду познания. Этот процесс заключается в выделении общего свойства, принадлежащего различным группам реальных объектов. Одним из таких общих свойств и является количественная сущность совокупностей реальных объектов, а именованные числа и есть тот язык, с помощью которого описывается количественная сущность. Таким образом, любое к-число является абстрагированным или обобщенным понятием.

Необходимо отметить, что для обозначения количественной сущности мы могли взять любой термин, никак не связанный со словом «число». Использование слова «число» для обозначения количественной сущности совокупностей реальных объектов носит чисто исторический характер. Другими словами, мы только по традиции называем конкретную философскую сущность именованным числом.

Из-за своей наглядности и интуитивной простоты прагматические к-числа оказались удобными в использовании. В практике были выработаны простые и удобные правила, позволяющие производить действия над прагматическими к-числами. Эти действия или операции над именованными числами ставят в соответствие некоторому набору именованных чисел новое именованное число.

В прематематике мы встречаемся с четырьмя арифметическими операциями, которые назовем: *к-сложением, к-вычитанием, к-умножением, к-делением*.

Начнем с описания к-сложения. Операция к-сложения ставит в соответствие *любым* двум к-числам третье к-число при определенном ограничении. Это ограничение заключается в том, что операция применяется *только к к-числам, имеющим одно и то же наименование*. Например, мы можем сказать, что если к стаду из трех баранов добавить еще два барана, то в стаде будет уже пять баранов. В этом примере мы двум именованным числам – три барана и два барана – поставили в соответствие другое именованное число: пять баранов. Легко видеть, что здесь *производится операция* над к-числами, имеющими одно и то же наименование: «баран». При таком определении к-сложение носит универсальный характер.

Используя современные обозначения, мы прежнее выражение можем также записать в виде:

3 барана + 2 барана = 5 баранов.

Несмотря на то, что эта запись выглядит как некое математическое выражение, на самом деле оно не является математическим. Это прематематическое описание операции к-сложения для двух конкретных к-чисел, выражающих количественную сущность двух множеств реальных объектов. Здесь мы вынуждены использовать современный язык, ибо представители современной человеческой цивилизации «забыли» тот язык, на котором говорили предыдущие цивилизации. Использование цифр – это просто замена символов, принятых в соответствующих цивилизациях и обозначающих степень обладания количественной сущностью, на символическое обозначение другой природы (в данном случае – цифрами). А использование математических символов операций – это также просто замена слов символами.

Применять операцию сложения к двум к-числам, имеющим разные имена, вряд ли имеет смысл. Однако в конкретных ситуациях часто требуется дать ответ, объединяющий эти два к-числа. Поясним на примере. Складывать трех баранов с двумя коровами вряд ли имеет смысл. Этот смысл появляется тогда, когда вместо двух разных слов употребляется одно слово: «голова». В этом случае результат сложения можно выразить словами, что в стаде, состоящем из трех баранов и двух коров, имеется пять голов скота. Несмотря на кажущуюся тривиальность последнего примера, хотелось бы обратить внимание на то, что приведенный здесь прием очень часто применяется в физике, в экономике, в других науках, использующих прематематические модели.

Операция к-сложения определяется *для всевозможных пар* одноименных к-чисел. Отметим одну принципиальную особенность, которую проиллюстрируем на примере. Операция к-сложения *определяется как на паре 3 барана, 2 барана, так и на паре 2 барана, 3 барана.* В принципе ниоткуда не следует, что *по выбранному определению* мы обязательно должны получить один и тот же результат. Один и тот же результат *в этом конкретном случае* мы получаем только потому, что это *вытекает из данного конкретного опыта*. Другими словами, коммутативность сложения двух именованных чисел определяется чисто индуктивно, апостериори. (Для сравнения отметим, что в математике коммутативность сложения двух натуральных чисел определяется априори.)

На множестве пар к-чисел мы можем определить другую арифметическую операцию: *к-вычитание*. Как и к-сложение, эта операция определена только для пар к-чисел, имеющих одно и то же наименование, причем она также ставит в соответствие паре к-чисел такое же к-число. Однако, в отличие от к-сложения, к-вычитание определено не на всех парах, а только на тех парах, у которых первое к-число больше второго к-числа. Это означает, что к-вычитание производится только тогда, когда имеется естественный (чисто практический) смысл в его проведении. Например, из стада в 6 баранов мы можем продать 4 барана, но из этого стада невозможно продать 10 баранов. В силу этого замечания и здравого смысла операция к-вычитания носит ограниченный характер и определена только на части пар из к-чисел. Другими словами, к-вычитание, в отличие от к-сложения, не является универсальной операцией.

В египетской и вавилонской цивилизациях использовали также к-умножение двух к-чисел, однако в очень ограниченных действиях: например, для вычисления площадей и объемов. И в этом случае к-умножение ставит в соответствие двум к-числам, имеющим одно и то же наименование, третье к-число, у которого наименование строится специальным путем. Кроме приведенных примеров, данная операция широко применяется в хозяйственной деятельности и в торговле, ибо любое вычисление стоимости связано с к-умножением между собой пар к-чисел. Эта операция носит универсальный характер, ибо она определена для всех пар целых к-чисел, с которыми имеет смысл проводить эту операцию.

Сделаем еще одно замечание – относительно позиционных систем представления к-чисел. Во многих древних цивилизациях к-числа представлялись с помощью определенной позиционной системы. В этом случае ее выбор ограничивал набор к-чисел, которые использовались в этой цивилизации. Переход от одной системы представления числа к другой системе записи был практически невозможен. Это означает, что прематематика в разных цивилизациях была разной. В этой ситуации между прематематиками в разных цивилизациях вряд ли имелась какая-либо связь.

Несколько позже в связи с практическими задачами появилась необходимость рассматривать взаимоотношения двух совокупностей, состоящих из одних и тех реальных объектов, или сравнивать степени обладания определенным свойством у двух реальных объектов. Например, соотношение количества баранов в двух стадах баранов, или соотношение длин двух струн. Здесь мы опять сталкиваемся с некими количественными величинами, выражающими соотношения между количествами или степенями обладания свойством. Другими словами, мы опять приходим к некоторым «числам» другого типа, которые по своей природе принципиально отличаются от прагматических к-чисел. Эти «числа» выражают соизмерение совокупностей или степеней обладания одним и тем же свойством, поэтому, поскольку они означают некую *соизмерительную сущность*, мы будем их называть прематематическими *с-числами*. При таком определении с-чисел они отражают, в частности, соотношение между двумя к-числами.

В качестве примера можно привести то, что в Вавилоне и в Египте, при решении некоторых задач, кроме целых значений количеств использовались и части от целого. В первую очередь использовались половинки и четвертинки. Позже появились в рассмотрении и другие части целого реального объекта. Заметим, что древние имели дело с частями *реальных* объектов, а не с *абстрактными* объектами, которыми являются дроби. Забегая вперед, скажем, что древние греки в математике не употребляли дроби, ибо дроби связаны с понятием числа единицы, существования которого они не признавали, о чем мы будем говорить более подробно ниже.

В исторической литературе (см., например, В. дер Варден, 12, История математики, 30, т.1, Я. Депман, 24) говорится об использовании дробей в древних цивилизациях, причем в понятие дроби вкладывают современное математическое содержание. Подобные утверждения являются спорными. Дело в том, что в сохранившихся письменных документах этих цивилизаций приводятся решения практических задач, в которых с современной точки зрения использовались дроби. Однако если рассмотреть внимательно приведенные решения задач, то можно увидеть, что в предлагаемых методиках этих решений ни в коем случае не упоминается и не используется понятие, которое можно толковать как дробь. Просто дается инструкция, которой надо следовать для того, чтобы получить решение конкретной задачи.

Так, например, древние египтяне использовали некие специальные обозначения для объектов, которые в литературе называют «аликвотные дроби», т.е. в современной записи они имеют вид 1/n . Однако, как это следует из письменных источников, в них вкладывался смысл части чего-то целого.

> «Появление класса аликвотных дробей весьма характерно для начального развития понятия числа в любой древней цивилизации. Это первое появление дробей из процесса дробления целого на части (другой источник возникновения дробей – процесс измерения), если не считать «натуральных» дробей типа 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/6 и 1/8, которые имели индивидуальные названия (это были доли египетской единицы площади «сетат»). Эти натуральные дроби возникли одновременно с целыми также из процесса деления целого на более или менее крупные части. Деление же единицы на большое число в практике вряд ли встречалось… Однако в древнеегипетской математике далее этих основных дробей, получивших название египетских, развитие не пошло» (История математики, 32, т.1, с. 25).

Приведенная цитата ярко характеризует то использование современных понятий, которое характерно для математической исторической литературы. Во-первых, здесь говорится о древнеегипетской математике, хотя в ней не было ни одного абстрактного понятия. Во-вторых, употребляется понятие дроби, хотя имеются в виду части от целого. В третьих, в этот цитате утверждается, что другим источником дробей является процесс измерения. Последнее утверждение скорее относится к вавилонской прематематике, нежели египетской, ибо у египтян мы не встречаем задач, из которых следует это утверждение. При более внимательном рассмотрении то, что у вавилонян обычно называют дробями , больше похоже на именованные числа, т.е. для решения своих задач вавилоняне использовали составные именованные числа.

Другим принципиальным историческим вопросом, касающимся с-чисел, является вопрос о том, знали ли древние народы некие числовые значения, которые выражали различные метрические соотношения между элементами геометрических фигур. Эти числовые соотношения являются, по своей сути, с-числами. Упростим вопрос: знали ли эти народы численное значение отношения длины окружности к диаметру? Это отношение играет большую роль при практическом вычислении площадей и объемов геометрических фигур. В сохранившихся древних документах встречаются методики решения практических задач, в которых производятся расчеты площадей и объемов геометрических фигур.

В исторической литературе часто говорят о том, что древние знали и использовали приближенное значение числа π. С этим достаточно трудно согласиться. Приведем несколько доводов в пользу нашего сомнения. Во-первых, во всех дошедших до нас письменных источниках дается описание численного решения конкретно сформулированной задачи. Именно в такой форме древние описывали методику решения практических вопросов. Так как все вычисления проводились только над целыми числами или над дробями специального вида, то в этих задачах нельзя встретить числовое выражение для числа π. Из этой методики современный математик может извлечь численное значение для π, поскольку оно там содержится. Однако это значение извлекает современный математик, который считает, что такое число существует.

Но тогда (во-вторых) мы приходим к тому, что древние принципиально не могли знать о существовании такого числа. Этот вопрос не мог у них возникнуть, поскольку он относится к интеллектуальному познанию, которым они не обладали. В пользу этого утверждения говорит также и следующий факт. Народы цивилизованного древнего мира в разных частях Земли решали подобные практические задачи с помощью различных методик, из которых современный математик может извлечь различные значения. Более того, разные народы имели различную систему записи или обозначения чисел, сравнение которых между собой представляет определенные трудности, причем сравнение некоторых из них удалось провести только в новое время. Поэтому утверждения историков математики, что древним было известно число π, напоминают известный анекдот: первым, открывшим рентгеновские лучи, был русский купец Лопухов, сказавший своей жене в XV веке, что он ее видит насквозь.

Прематематические с-числа принципиально отличаются от прематематических к-чисел. Во-первых, к-числа являются именованными числами, а с-числа не являются таковыми в обычном смысле. Во-вторых, на множестве к-чисел над этими числами естественным образом проводятся арифметические операции. Над с-числами нет такой естественной возможности проводить подобные операции.

В силу того, что с-числа носят достаточно абстрактный характер и круг людей, знакомых с ними и пользующийся ими, достаточно ограничен, то для них в обычном языке человеческого общения нет специфических терминов.

Практическая жизнь и потребности экономики вынудили ввести в рассмотрение еще один вид так называемых прематематических «чисел». Любая хозяйственная жизнь требует сосчитать количество реальных объектов в той или иной их совокупности. Для пересчета объектов мы должны их упорядочить. Например, первый баран, второй баран и т.д. Здесь мы опять имеем дело с прематематическими именованными числами определенного вида, который не имеет ничего общего с введенными выше прематематическими к-числами и с-числами. Этот новый вид именованных чисел также является прематематическим объектом. Он выражает так называемую *упорядочивающую сущность*, которая принадлежит группам реальных объектов. Упорядочивающая сущность, обозначаемая как философская категория наряду с количественной сущностью, является также первичным свойством элементов множеств *реальных* объектов. Для обозначения степеней обладания упорядочивающей сущности используются специальные словесные символы.

В каждом языке человеческого общения мы сталкиваемся со специальными словесными символами – словами, которые используются для выражения степени обладания упорядочивающей сущности. Например, в русском языке это: первый, второй, третий…; в английском языке – first, second, third… Эти слова употребляются вместе с именем объекта из упорядочиваемой совокупности объектов. Для удобства дальнейших рассуждений именованные числа этого рода, которые появляются в тех случаях, когда мы хотим ввести некий порядок среди реальных объектов, т.е. упорядочить их, и которые выражают установленный порядок, мы назовем *прематематическими п-числами,* или *прематематическими порядковыми именованными числами*.

Из определения следует, что любое п-число является именованным числом, состоящим из двух частей: первая часть – это словесный символ, означающий конкретную степень обладания упорядочивающей сущности, а вторая часть есть имя упорядочиваемого объекта.

Прематематические порядковые именованные числа по своей сути отличаются от прематематических количественных именованных чисел. Различие прежде всего связано с отличием количественной сущности от порядковой (упорядочивающей) сущности, поскольку они имеют различную природу. Это различие проявляется в том, что на множестве именованных п-чисел *нельзя* естественным образом определить арифметические операции, подобные тем, которые естественно определяются на множестве именованных к-чисел.

Необходимо отметить, что в английском языке, и в русском имена к-чисел и п-чисел отличаются, как отличаются и способы их применения. Это объясняется тем, что весь накопленный человеческий опыт использования этих типов чисел не смог выявить какую-либо общность между ними. Поэтому в языке человеческого общения мы видим отражение *только* их принципиального различия, а не общности.

Однако между именованными п-числами и именованными к-числами есть глубокая связь. Эта связь заключается в том, что без употребления п-чисел, как мы уже говорили выше, нельзя сосчитать количество (т.е. получить конкретное к-число) объектов в совокупности. Другими словами, количественная сущность множества реальных объектов непосредственно связана с порядковой сущностью того же множества: количество реальных объектов в каждом конкретном множестве неразрывно связано с порядковым числом последнего объекта в порядке (счете) объектов множества.

Из определений к-числа, с-числа, п-числа мы видели, что все эти типы чисел принципиально отличаются друг от друга. Единственное, что их объединяет, – это слово «число», которое входит в каждое имя. На самом деле мы для каждого типа могли бы взять имя, не содержащее слова «число». Использование слова «число» в этом случае связано прежде всего с историческими причинами. Впервые пристальное внимание на различие между двумя сущностями – количественной и упорядочивающей – в математике обратили *только* во второй половине XIX века, когда появилась теория множеств, в которой были введены понятия количественных и порядковых чисел в качестве принципиально различных математических объектов.

Все перечисленные типы прематематических чисел являются *наглядными* прагматическими объектами, ибо они были сформулированы путем обобщения реальных наблюдений или результатов практической деятельности (опыта). Сразу отметим, что для решения большинства практических задач, которые требовали проведения численных расчетов, были необходимы главным образом операции над к-числами. Это означает, что методики решения практических задач имеют дело, в основном, с использованием к-чисел.

2.3. Прематематические знания.

Выше мы определили прематематику как набор методик для решения практических задач. Из этого определения вытекает несколько следствий.

Во-первых, методика решения практической задачи представляет собой формализацию опыта определенного человеческого сообщества или отдельного человека из этого сообщества, то есть некий интеллектуальный продукт. Поэтому эту методику можно рассматривать как определенное знание, которое в этом случае называется ***прематематическим знанием***.

Во-вторых, несмотря на то, что в письменных документах всегда дается решение конкретной численной задачи, все же эта методика описывает решение некоторой совокупности однотипных задач. Это значит, что она была выработана на основе решения не отдельной конкретной задачи, а некоторой совокупности однотипных задач. Из папируса Райнда следует, что решение конкретной задачи являлось способом дидактического обучения, принятого в то время. Другого более формального способа объяснения и не могло существовать в силу индуктивного способа получения решения задачи.

В-третьих, данная методика решения практических задач представляет интерес только потому, что она является инструкцией для решения подобных задач, которые возникнут в будущем. Другими словами, на задачу получения этой методики можно смотреть как на *задачу прогнозирования*.

Методики решения практических задач демонстрируются на конкретных примерах и представляют собой просто инструкции, которым нужно следовать, чтобы решить подобные задачи. Полностью отсутствует какое-либо логическое или содержательное объяснение, почему необходимо следовать приведенной инструкции. Это означает, что данные методики формулируются чисто индуктивным (опытным) путем. В силу сказанного, использование методик, полученных индуктивным путем, основано на *соглашении* между людьми об их использовании.

Усилия древних цивилизаций, таких, как египетская или вавилонская, как можно судить по дошедшим до нас письменным источникам, были сосредоточены, в основном, в двух направлениях, одно из которых условно назовем *арифметическим*, а второе – *геометрическим*. Сразу отметим, что развитие этих направлений в каждой цивилизации происходило, по всей видимости, без всякой связи одна с другой. Это значит, что в разных цивилизациях указанные направления развивались разными путями.

В *арифметическом* направлении решались задачи, связанные с расчетом заработной платы (в понимании древнего мира), с расчетом запасов и расходов хлеба или пива и т.п. Еще раз отметим, что решение указанных задач связано с действиями над именованными числами, для чего в каждой цивилизации вводилась своя иерархия именованных чисел. Введение операций над именованными числами не носило никакой интеллектуальной нагрузки, ибо эти операции просто служили для упрощения записей, что повышало эффективность процесса вычислений. Каждая человеческая цивилизация обладала своей техникой вычисления. Отличительной чертой всех задач, встречаемых в сохранившихся письменных документах, является то, что эти задачи являлись *конкретными* и служили примерами решения аналогич-ных задач. Другими словами, при решении других задач использовалась *аналогия*, но *не формализация*. Это означает, что в этом случае интеллектуальное развитие упомянутых человеческих цивилизаций не доросло до процесса формализации или абстрагирования.

Геометрическое направление также было тесно связано с решением практических задач. В этих задачах выступает на первый план вычисление площадей, поверхностей и объемов, необходимых в хозяйстве. Само использование слова «геометрическое» является просто данью сложившегося в истории математики общественного мнения. На самом деле ничего «геометрического» в современном смысле слова в документах египетской и вавилонской цивилизаций не было.

Для удобства дальнейших рассуждений совокупность практических задач, решаемых в геометрическом направлении, условно назовем *геометрической прематематикой*. В методиках решения практических задач использовалась только специфичность *формы* фигур на чертежах. Никаких утверждений, подобных утверждениям, которые встречаются в греческой математике, у этих цивилизаций не встречается. Отличительной чертой геометрической прематематики является та же черта, о которой мы писали в предыдущем абзаце: геометрическая прематематика решала задачи по аналогии на основе конкретных примеров, и она не доросла в интеллектуальном развитии до формализации или абстрагирования.

К этому выводу также приходит Ван дер Варден:

«Конечно, в обоих случаях вычислитель должен был знать правила, по которым следовало производить вычисление. Но что касается систематического вывода правил для этих расчетов, то о них нет речи, да и не может идти, ибо часто (как, например, при определении площади круга) употребляются только приближенные формулы» (Ван дер Варден, 12, с. 42).

(И эта цитата свидетельствует об использовании историками математики современных понятий в применении к интеллектуальным процессам, протекающим в древности. Здесь мы встречаемся с современным понятием «приближенные формулы», которого не могло быть в догреческих цивилизациях, ибо не существовало такого объекта, к которому надо было «приближаться».)

Сравнивая между собой достижения в прематематике вавилонской и египетской цивилизаций, можно сказать, что вавилонская цивилизация достаточно далеко продвинула прематематику по сравнению с египетской. Из наиболее высоких достижений вавилонской цивилизации отметим введение в широкое рассмотрение позиционной системы счисления. Шестидесятеричная система счисления для чисел была заимствована вавилонскими семитами от их предшественников – шумеров. Введение позиционной системы счисления позволило существенно упростить все процессы вычислений, в том числе и вычисления в прикладных задачах, связанные с дробными частями именованных чисел.

Вавилоняне дополнили египетскую геометрию набором новых конкретных геометрических задач, среди которых встречаются конкретные численные формулировки так называемой теоремы Пифагора. Однако и вавилонская геометрия также остается только набором методик решения конкретных геометрических задач, которые формулировались как практические задачи. Изложение их решения в сохранившихся письменных источниках свидетельствует о том, что эти решения были получены только на основе прагматического познания.

Уже к седьмому веку до н.э. в связи с упадком соответствующих цивилизаций вавилонская и египетская прематематики превратились в мертвые знания. Из циркулирующих в то время прематематических знаний трудно было определить, что является «истинным», т.е. «соответствующим действительности», а что «ложным». Другими словами, было неизвестно, в частности, как выделить из двух различных методик решения одной и той же практической задачи, приводящих к разным результатам, ту, что приводит к более правильному результату.

Но экономическая жизнь человеческих сообществ продолжалась и после вавилонской и египетской цивилизаций. Эта жизнь требовала решения практических задач, и это делали тем или иным путем, иногда используя знания, доставшиеся от других цивилизаций, а по большей части заново открывая пути их решения. Другими словами, прематематика была вынуждена продолжать жить и развиваться, чтобы давать ответы на появляющиеся практические вопросы.

В заключение охарактеризуем прематематику с позиции теории познания. Все рассмотрения в прематематике связаны с реальными объектами и направлены на получение практических знаний. Поэтому, как мы уже упоминали выше, прематематика представляет собой один из типов прагматического познания.

Объектами прематематики являются именованные числа и реальные объекты, имеющие геометрическую форму. «Истинными» утверждениями в прематематике являются общественно-признанные методики решения практических задач. Эти методики задаются на примере решения конкретных задач, причем подобные задачи решаются аналогично. Выбор методики решения конкретной задачи производится на основе практического опыта. Решение конкретной задачи признается примером для решения подобных задач только тогда, когда оно принимается определенной общественностью. Никакого объяснения того, почему или на каком основании выбрана та или иная методика, в письменных документах древних цивилизаций нельзя найти.

В прематематике не встречается таких задач, для формулировки которых используется формализация или абстрагирование понятий. Это означает, что для прематематики чужды процессы формализации и абстрагирования.

В настоящее время имеют распространение две противоположные точки зрения. Сторонники одной точки зрения – практически общепризнанной со времен Возрождения и вплоть до наших дней – смотрят на греков почти с суеверной почтительностью, как на изобретателей всего того, что имеется наилучшего, как на людей сверхчеловеческой гениальности, сравниться с которой современные люди не могут и надеяться. Приверженцы другой точки зрения, вдохновленные торжеством науки и оптимистической верой в прогресс, считают авторитет древних кошмаром и утверждают, что теперь лучше всего предать забвению большую часть их вклада в человеческую мысль.

Б. Рассел

Часть 2. Греческая математика.

Греки сделали еще один вклад, оказавшийся поистине наиболее устойчивой ценностью для абстрактной мысли: они открыли математику и искусство дедуктивного рассуждения. Именно геометрия – специфическое греческое изобретение, и без нее современная наука была бы невозможна.

Б. Рассел

Глава 3. Возникновение и развитие математики в древней Греции.

Они (греки) изобрели математику, науку и философию; на место простых летописей они впервые поставили историю; они свободно рассуждали о природе мира и целях жизни, не обремененные путами какого-либо традиционного ортодоксального учения. Происшедшее было настолько удивительным, что люди до самого последнего времени довольствовались изумлением и мистическими разговорами о греческом гении.

Б. Рассел

Любая наука, включая логику и математику, есть продукт своей эпохи. Наука воплощена в своих идеалах не в меньшей мере, чем в результатах.

Э. Г. Мур

3.1. Общие замечания.

До возникновения науки человечество прошло длинный путь развития в несколько сотен веков, и он распадается на ряд цивилизаций, которые возникали, существовали и исчезали в различных частях земного шара. От одних из цивилизаций не сохранилось никакого следа, от других остались следы их материальной культуры, а от третьих – еще и письменные документы. Значительное число этих документов сохранилось в районе, который сегодня называют Ближним и Средним Востоком, простирающимся от Крита и Египта на западе и до Индии на востоке. Историю развития человечества того времени часто разделяют на периоды, связанные с основным технологическим способом производства: каменный период, бронзовый, железный. Каждый из этих периодов характеризуется специфическим уровнем совершенствования орудий труда, предметов материальной культуры.

Сохранившиеся следы материальной культуры и письменные памятники ушедших цивилизаций свидетельствуют об уровне общественной и индивидуальной жизни человека, для достижения, поддержания и развития которого необходимо было возникновение и сохранение соответствующих прагматических знаний. Эти знания были накоплены в различных областях человеческой деятельности: в сельском хозяйстве, в строительстве, в мореплавании, в производстве орудий труда, в медицине и т.п., короче – в результате решения практических задач различного профиля. Практические знания передавались от поколения к поколению, сохранялись, пополнялись, совершенствовались, о чем свидетельствуют многочисленные письменные документы, дошедшие до нас от таких цивилизаций, как вавилонская и египетская. Наличие этих знаний приносило их обладателям непосредственную пользу. Стали появляться и многочисленные специалисты, которые жили на доходы от применения своих знаний. Прагматические знания вполне удовлетворяли нужды развивающихся цивилизаций. Поэтому для решения практических задач не было никакой необходимости в других типах познаний.

В то время в духовной и интеллектуальной области не было никакой практической необходимости и потребности в возникновении нового типа интеллектуального познания, отличного от существовавшего религиозного и мистического. Религиозное интеллектуальное познание (религия), которое у разных народов возникло в более ранние периоды развития человечества, вполне удовлетворяло нужды человеческих сообществ.

И *вдруг* в определенном месте, а именно в древней Греции, в определенный момент (VII – V вв. до н.э.) произошла подлинная интеллектуальная революция, которая, как показала дальнейшая история, оказала влияние на все развитие человечества. Возможно, что подобные события происходили и ранее, но их влияние носило ограниченный характер, как по месту, так и по времени. Невозможно переоценить успех этой революции в различных отраслях человеческой деятельности. Но основные ее достижения лежали в интеллектуальной области: греки создали интеллектуальную триаду, состоящую из философии, физики и математики. Эта триада является одним из высочайших достижений человеческой мысли. Ни один другой народ не смог создать нечто подобное.

Трудно перечислить все истоки интеллектуальной деятельности, продолжение которых мы видим прежде всего в западноевропейской мысли. В процессе развития греческой философии происходит формирование всех жанров философствования, впоследствии типичных для европейской традиции: первая, тяготеющая к позитивному знанию, натурфилософия (Милетская школа); первая спекулятивно-умозрительная метафизика (Элейская школа); первый опыт мистического философствования (пифагорейство); первый вариант европейского просвещения (софисты); первая система рафинированного идеалистического интеллектуализма (Платон); первая универсальная и всеохватная мировая схематика (Аристотель); первые образцы релятивизма, скептицизма и многое другое. К философии добавим еще создание и развитие математики и физики, новые подходы к астрономии, к биологии…

Этот список можно продолжать и продолжать. И все это – интеллектуальная продукция ***одного*** народа, созданная в течение ***двух-трех столетий***, народа, который впоследствии исчез, растворился… Влияние греческого наследства на всю последующую духовную жизнь человечества трудно переоценить. Для иллюстрации приведем слова известного математика и философа Б. Рассела о роли греческой геометрии в истории:

«Влияние геометрии на философию и научный метод было глубоким. Геометрия в том виде, в каком она установилась у греков, отправляется от аксиом, которые являются самоочевидными или полагаются таковыми. Далее, путем дедуктивного рассуждения, геометрия приходит к теоремам, которые весьма далеки от самоочевидности. При этом утверждают, что аксиомы и теоремы являются истинными применительно к действительному пространству, которое является чем-то данным в опыте. Поэтому кажется возможным, используя дедукцию, совершать открытия, относящиеся к действительному миру, исходя из того, что является самоочевидным. Подобная точка зрения оказала влияние как на Платона и Канта, так и на многих других философов, стоявших между ними. Когда Декларация независимости говорит: «Мы утверждаем, что эти истины самоочевидны», – она следует образцу Евклида. Распространенная в XVIII веке доктрина о естественных правах человека является поиском евклидовых аксиом в области политики. Форма ньютоновского произведения «Начала», несмотря на его общепризнанный эмпирический материал, целиком определяется влиянием Евклида. Теология в своих наиболее точных схоластических формах обязана своим стилем тому же источнику» (Б. Рассел, 53, с. 55).

Так как создание и развитие математики непосредственно связаны с аналогичными процессами в философии и в физике, то историю математики нельзя рассматривать без связи с историей философии и физики.

В процессе создания греческой математики, который протекал в VI – IV веках до н.э., принимало участие несколько групп (школ) греческих ученых, объединяющих десятки человек, память о многих из которых осталась в общечеловеческой истории, благодаря сохранившимся письменным источникам. Ниже мы будем ссылаться на ряд наиболее выдающихся имен в греческой истории. С точки зрения XXI века трудно судить о первенстве тех или иных ученых в тех или иных достижениях, тем более что труды многих из них пропали, а о деятельности других остались лишь упоминания их учеников или других ученых. Поэтому, следуя по стопам историков, мы, как правило, приписываем первенство в достижениях тем, в трудах которых мы их впервые встречаем, или тем, кому их приписывают те или иные древние авторы в дошедших до нас книгах.

До сих пор мы, по существу, не упоминали ни одного имени из выдающихся математиков, получивших значительные научные результаты как в геометрии, так и в теории чисел, доказавших ряд теорем и решивших ряд трудных задач. Эти математические результаты затем изучались и изучаются последующими поколениями вплоть до настоящего времени, служили и служат источником наслаждения, связанного с пониманием интеллектуальной красоты, заложенной в них. Это неупоминание связано только с тем, что нас интересуют, как мы уже говорили выше, в основном методологические вопросы развития математики, а не отдельные математические теории или результаты.

С падением Римской империи в V веке н.э. математика исчезла с европейского континента вместе со всей греко-римской культурой. Единственным местом, в котором в то время еще занимались математикой, была Индия, куда ее завезли греки во времена походов Александра Македонского, а также те греки, которые бежали от гонений в более поздние времена. Затем, в VII – VIII веках, математика обосновалась в арабских странах.

В литературе по истории математики широко распространенно мнение, что корни греческой математики лежат в египетской и вавилонской прематематиках, с которыми были знакомы греческие философы и мудрецы. Это мнение основано, в частности, на том, что в сохранившихся письменных документах, относящихся к этим цивилизациям, описаны методики решения практических задач, для понимания которых историками математики был применен современный математический язык. Исторические исследования создали иллюзию для многих, в том числе и для математиков, будто в этих письменных документах говорится о математических задачах. Однако с этим мнением трудно согласиться.

Во-первых, трудно поверить, что методики решения практических задач, которые содержатся в письменных документах, передавались из одной человеческой цивилизации в другую для практического использования. Другими словами, вряд ли с достижениями египетской цивилизации были знакомы вавилоняне.

Во-вторых, для передачи практических знаний требуется достаточно широкое знание письменных языков других цивилизаций, а также интенсивный обмен знаниями, на что при том уровне образования и уровне общения между соответствующими группами населения разных стран, которые господствовал тогда, трудно рассчитывать. Скорее всего, каждая новая цивилизация заново открывала прематематические знания, когда этого требовала практическая жизнь.

В-третьих, объекты, которыми оперировали египтяне и вавилоняне, принципиально отличались друг от друга. Только современные историки математики смогли сопоставить их между собой. Такое сопоставление объектов в прошлом было просто невозможным.

В-четвертых, способ решения любой практической задачи должен был получить одобрение определенных слоев населения. В силу этого вряд ли решение задачи смогло получить общественное согласие, если его выработка не была связана с определенным внутренним процессом.

Так как греки, жившие в различных полисах, едва ли могли разобраться в тех относительно редких письменных документах исчезнувших цивилизаций, то им пришлось заново изобретать методы решения практических задач. Таким образом, и у греков появились свои вычислительные приемы решения практических задач, собрание которых, как мы уже упоминали, греки называли ***логистикой***. Термин «логистика» является, по существу, синонимом понятия «прематематика».

Логистика сама по себе не могла привести к созданию (возникновению) математики, ибо она не содержала в себе ни одной идеи, которую можно было бы , пусть даже с помощью аналогии, перенести в математику. Объекты, с которыми имеет дело математика, не встречаются в логистике, а методы исследования, которые применяются в математике, даже отдаленно не напоминают методы логистики. Другими словами, как мы уже отмечали выше, математика и прематематика представляют собой принципиально различные типы познаний. В связи с этим возникает вопрос, который в той или иной форме мы уже неоднократно задавали: каким образом и почему возникла математика?

На первую часть этого вопроса в той форме, в которой он задан, ответить относительно просто. Основное стройное, интеллектуально великолепное здание математики было построено греками в течение трех веков как выдающееся произведение интеллектуального искусства. Полное описание внешнего вида и внутреннего убранства этого здания можно найти у Евклида. Основные его элементы и архитектура являлись плодом вдохновения и фантазии ряда греческих мыслителей и математиков, среди которых мы встречаем немало выдающихся интеллектуалов. Математические работы, созданные множеством греческих математиков, представляют собой замечательные произведения интеллектуального искусства.

Однако, исходя из целей нашего исследования, мы выделим и обсудим ниже только вклад в математику Фалеса, Пифагора, Зенона, Протагора, Платона, Аристотеля и Евклида. Ясно, что этот список может показаться достаточно странным, причем в нем отсутствует ряд имен, которые, по принятому мнению, внесли существенный вклад в развитие математики. Однако выделенные нами мыслители определили основные понятия математики, выработали основные ее методы и были заняты разработкой проблем обоснования и логического уяснения основ математики. (Из указанного выше списка только два имени принадлежат математикам, а вклад остальных мыслителей в развитие математики носит чисто методологический характер). Ограничение этого списка продиктовано прежде всего тем, что, как мы уже говорили выше, в рамках этой работы мы в меньшей степени интересуемся собственно содержанием основных математических теорий и фактов, а основное внимание уделяем методологическим проблемам развития математики.

Вторая часть вопроса кажется простой и даже тривиальной, если базироваться на упомянутом выше общепринятом в современной литературе подходе к понятию «математика». Общепринятый подход рассматривает математику как набор всевозможных знаний, касающихся измерения количества и количественных отношений. С этой точки зрения математические знания встречаются уже в различных древних цивилизациях. Другими словами, современная теоретическая математика является последующим развитием уже существовавших в древнем мире египетской и вавилонской математик. С этих позиций ответ на вопрос, почему возникла математика, является простым и даже очевидным. Этот ответ можно сформулировать следующим образом: математика возникла из необходимости решать те количественные задачи, которые возникали из потребностей практической жизни. (См., например, Историю математики, 30, т.1.)

Однако такой подход, по нашему мнению, не только содержит противоречия с точки зрения математической методологии, но и не согласуется с рядом исторических фактов, некоторые из которых мы подробно обсудим ниже. Здесь же только для иллюстрации приведем два факта.

Во-первых, как мы уже говорили выше, в Греции к моменту возникновения математики уже существовала область практических знаний, известная под именем «логистика», которая состояла из различных методик решения прикладных арифметических и геометрических задач. Она существовала и до появления математики, ибо греческая цивилизация возникла за несколько веков до появления математики. Поэтому, в случае, если математика произошла из прематематики, то ее корни должны быть скорее в логистике, нежели в египетской или вавилонской прематематике. Но ни в одном из дошедших до нас литературных источников ни один из математиков первых столетий существования математики (в том числе и Евклид) не упоминает вместе математику и логистику в той или иной связи.

Во-вторых, из дошедших до нас письменных документов не видно существования ничего такого, что могло быть связывающим звеном между логистикой и математикой. Если бы математика произошла из логистики, то должны были существовать исследования, содержание которых как-то связывало бы математику и логистику.

Если же отказаться от общепринятой точки зрения на возникновение математики, а предположить, что ее создали греки, то вопрос о причинах рождения математики становится уже не столь простым и очевидным. Эта очевидность также пропадает, если задать еще один вопрос: если математика выросла из практики, то почему же ни один народ, проживающий в различных местах нашей планеты, не создал ничего подобного греческой математике, ни до древних греков, ни во время их существования, ни после их исчезновения?

Вдумываясь в заданный только что вопрос, видишь, как ответ на ранее сформулированный начинает покрываться мистической дымкой. Здесь мы можем дать ответ, который входит в противоречие с общепринятым мнением.

Математика возникла случайно, без всякой связи с практическими нуждами. Во время ее рождения произошло уникальное стечение обстоятельств. Уникальность ситуации, связанной с возникновением математики, заключалась в том, что она родилась в одном из греческих полисов как часть некоего мистического учения (религии), чьим создателем был харизматический учитель, по имени Пифагор, который смог сплотить вокруг себя значительное число верующих, признавших его своим пророком. Эти верующие были специальным образом отобраны и воспитаны таким образом, чтобы они были способны заниматься математикой. Другими словами, они составили первую математическую школу.

Вероятность повторения подобной ситуации в другом месте и в другой культуре представляется практически равной нулю, что и подтвердилось всей предыдущей и дальнейшей историей.

Здесь необходимо отметить, что математика представляла собой особый вид «интеллектуальной игры» с достаточно сложными и изощренными правилами, которые позволяли из одних утверждений получать другие утверждения. В этом смысле математика при своем рождении напоминала шахматы. Связь между математикой и шахматами обсуждается в книге Г.Г. Харди (62).

Весь процесс, от возникновения математики до ее расцвета и упадка, происходил, как мы уже упоминали, всего в течение трех столетий, без всякой связи с решением прикладных задач, с практикой. Затем в течение почти пятнадцати веков не было получено никаких принципиально новых математических результатов. В этот период математика практически исчезла из культурной жизни европейцев, будучи похороненной в книгах. Только в последние несколько веков рассматриваемого периода математические знания вернулись в Европу и были усвоены европейцами.

Теперь вернемся к истории математики и к греческим ученым. Мы начинаем эту историю с *Фалеса,* потому что его имя обычно упоминается в литературе первым, когда говорят о рождении греческой философии, физики и математики. *Пифагор* – это основная фигура, которой математика, по существу, обязана своим рождением и существованием. Апории *Зенона*, нападки на математиков *Протагора* заставили поколения математиков стремиться к строгости и точности понятий и выводов, оказали существенное влияние на методологию математики, выявив проблемы, связанные с логическим обоснованием математики, с проведением математических рассуждений. *Платон* заложил методологические основы геометрии, а также внес вклад в логику использованием рассуждений от противного для обоснования утверждений. *Аристотель* – другой великий философ, основной вклад которого в математику состоял в создании и оформлении логики математического доказательства, а также аксиоматического построения науки. Наконец, *Евклид* – создатель энциклопедии-учебника математики, написанием которого был подведен итог начального развития данной науки. Подтверждению этому служит тот факт, что к моменту написания «Начал» Евклида методологические основы греческой математики были полностью созданы и просуществовали практически без изменения до возникновения европейской математики. «Начала» послужили основой для получения математических знаний во всех остальных поколениях математиков вплоть до сегодняшних дней. Без преувеличения можно утверждать, что без существования этой книги вряд ли математика смогла бы возродиться после уничтожения греческой цивилизации.

Мудрее всего – время, ибо оно раскрывает все.

Фалес

3.2. Фалес.

На самом переднем крае создания греческой математики, согласно принятой математической историографии, стоит Фалес, который был первым из «семи мудрецов», являвшихся, в сущности, скорее государственными деятелями, законодателями и моралистами, нежели учеными. Фалес знаменит многими прикладными мудростями. Ему, например, приписывают предсказание солнечного затмения во время битвы на Галисе, советы мореплавателям ориентироваться по Малой Медведице и др. Но он также, согласно традиции, оставил неизгладимый след в греческой геометрии и вместе с ней и во всей греческой математике.

«Тщательно рассматривая предложения, приписываемые Фалесу, замечаешь, что эти предложения характерны отнюдь не для первых математических открытий, а скорее для начала систематического логического изложения математики. В самом начале, когда люди переживают первые радости открытий, они занимаются задачами вроде следующих: как мне вычислить площадь четырехугольника или круга, объем пирамиды, или длину хорды, или: как мне параллельно основанию разделить трапецию на две равные части. Но это и будут как раз те задачи, которые решались в египетских и вавилонских текстах. И только позже возникает вопрос: как мне все это доказать?

Этот вопрос становится основным именно в то время, когда о достигнутых древней математикой результатах, частью логически не увязанных, частью справедливых и частью ошибочных, узнает младшее поколение страстно любознательных чужестранцев. Во время Фалеса египетская и вавилонская математика давно уже были мертвыми знаниями. … Каким же образом мог Фалес отличить точные и правильные вычислительные формулы от приближенных и ошибочных? Разумеется, при помощи создания логической связанной системы! Согласно Евдему, он действительно так и сделал…

Характерная и совершенно новая черта греческой математики заключается именно в постепенном переходе при помощи доказательства от одного предложения к другому. Очевидно, что греческая математика имела с самого начала такой характер, и этот характер был придан ей Фалесом» (Ван дер Варден, 12, с. 124).

В этой цитате Ван дер Варден говорит о греческой математике. Однако в нашем контексте более правильно употреблять вместо слова «математика» слово «прематематика», ибо Фалес во всех своих рассмотрениях решал практические задачи. Кроме того, эта цитата еще раз демонстрирует обычное мнение историков, что рождение математики непосредственно связано с прематематикой.

Основная причина, что мы при изложении истории математики обращаемся к Фалесу, состоит в том, что согласно традиции, которая была заложена, по всей вероятности, несколькими веками позже, Фалес был первым, кто дал математическое доказательство нескольким геометрическим утверждениям.

«…он, научившись у египтян геометрии, первый вписал прямоугольный треугольник в круг и за это принес в жертву быка» (Диоген Лаэртский, 39, с. 61-62).

Говорить о том, что Фалес доказал какое-либо математическое утверждение в современном смысле слова, вряд ли фактически правильно, ибо методология математических доказательств появилась только несколькими веками позже. По всей вероятности, Фалес был первым, кто высказал эти или подобные им утверждения в формальном виде и, возможно, привел формализованные рассуждения в их пользу. Сама по себе формулировка неких утверждений относительно формальных, абстрактных объектов является революционным интеллектуальным достижением, ибо подобных утверждений мы не встречаем в письменных документах других цивилизаций, относящихся и к прематематике.

Наше замечание об отсутствии математического доказательства у Фалеса нисколько не умаляет его роль в истории математики. Уже сама попытка говорить о чем-то, напоминающем математическое доказательство, представляет собой принципиальный интеллектуальный скачок, который послужил первым основным шагом в создании нового интеллектуального познания. Уместно также заметить, что все математические упражнения Фалеса не имели никакого отношения к его занятиям философией и к его видению окружающего мира. Вряд ли сам Фалес осознавал значение своего первого «доказательства» первой геометрической теоремы. Те геометрические теоремы и утверждения, доказательства которых приписываются Фалесу, не диктовались какой-либо практической деятельностью и не связаны с ней.

Геометрические утверждения Фалеса не являются фрагментами какой-либо интеллектуальной картины, ни частью какой-либо теории. Этих математических фактов и их «доказательств» было явно недостаточно, чтобы из них могла родиться наука математика.

Фалес жил в Ионии, и в его время из Ионии не вышло ни одного ученого, чьё имя можно было бы связать с математикой. Рождение математики произошло не там. Оно произошло в другой части греческого мира, в южной Италии, где у колыбели математики стоял Пифагор.

Блаженство есть знание совершенства чисел души.

Пифагор

Так называемые пифагорейцы были первые, занимавшиеся науками. Поскольку в дальнейшем они узнали, что отношения и законы музыкальной гармонии основываются на числах, а также и все предметы по своей природной сущности тоже, по-видимому, походят на числа…, то они высказали мнение, что элементы чисел являются элементами и всех вещей и что весь мир в целом является гармонией и числом.

Аристотель

3.3. Пифагор.

Основной фигурой, стоявшей у основания математики, был Пифагор Самосский, который был младшим современником Фалеса. Значение Пифагора для западной мысли трудно переоценить. Ярко и образно это выразил известный математик и философ XX века Б. Рассел:

«Я не знаю другого человека, который был бы столь влиятельным в области мышления, как Пифагор. Я говорю так потому, что кажущееся платонизмом оказывается при ближайшем анализе в своей сущности пифагорейством. С Пифагора начинается вся концепция вечного мира, доступного интеллекту и недоступного чувствам. Если бы не он, то христиане не учили бы о Христе как о Слове; если бы не он, теологи не искали бы логических доказательств бытия бога и бессмертия души» (Б. Рассел, 53, с. 56).

С ним можно согласиться, ибо найти подобную фигуру в истории западной цивилизации, которая оказала такое выдающееся интеллектуальное влияние на всю последующую историю человечества, действительно трудно. Из западных мыслителей можно назвать Декарта и Ньютона, значение которых на развитие интеллектуальной мысли приближается к значению Пифагора.

Прокл, комментатор «Начал» Евклида, живший в V в. н.э., писал:

«Пифагор преобразовал эту науку (т.е. математику — Е.Л.) в форму свободного образования. Он изучал эту науку, исходя из первых ее оснований, и старался получать ее теоремы при помощи чисто логического мышления, вне конкретных представлений. Он открыл теорию иррациональных (или пропорций) и построение пяти космических тел (т.е. правильных многогранников — Е.Л.)».

Эти слова означают, что Пифагор первый построил геометрию как дедуктивную науку. Однако здесь необходимо выразить определенное сомнение в этом утверждении. Во-первых, не сохранилось ни одной строки, принадлежащей Пифагору. Основная часть сведений о нем содержится в пересказах более поздних авторов, таких, как Платон, Аристотель, Диоген Лаэртский, Прокл и другие. Во-вторых, в окружении Пифагора господствовала традиция приписывать все полученные математические результаты своему учителю Пифагору. В силу сказанного, слова Прокла можно отнести также и к ученикам Пифагора, т.е. к его школе.

Пифагор выступил в VI веке до н.э. в качестве пророка, создавшего религиозную секту, сыгравшую значительную роль в политической жизни греческих городов Италии. Пифагор, который был также выходцем из Ионии, много путешествовал по странам

Востока и жил там. В Египте и Вавилоне, где провел значительную часть своей жизни и познакомился со многими существовавшими в то время религиозными и мистическими учениями. Результаты этих путешествий оказали существенное влияние на всю его дальнейшую деятельность. Когда Пифагора спрашивали, кем он является, то он отвечал: «Я философ». Он был первым, кто ввел в обращение слово «философ», которое объяснил следующим образом:

«Три сорта людей существует в этом мире, их можно сравнить с тремя категориями людей, приходящих на Олимпийские игры. Одних привлекает результат, других – слава и известность. Но среди них есть и те, что приходят, чтобы посмотреть и понять, ради чего все затевается.

Это похоже на саму жизнь. Одни гоняются за счастьем, другие – за могуществом и властью. Но самый любознательный посвящает себя поиску смысла и целей самой жизни. Он пытается раскрыть законы природы. Такого человека я называю философом. И хотя и его мудрость нельзя назвать совершенной во всех смыслах, но именно он способен любить ее и относиться к ней как к ключу к познанию мира».

Таким образом, Пифагор был первым, который употребил слово «философ», а также определил задачи философии и науки в целом, создав целое философское направление, представителей которого можно и сегодня найти как среди ведущих философов современности, так и среди крупнейших ученых. Это он сделал математику частью философии, символом гармонии и красоты, частью мировоззрения. Значение Пифагора в истории возникновения и развития математики не просто велико: без личности подобного масштаба, обладавшей таким харизматическим, интеллектуальным зарядом, вряд ли могло возникнуть то, что сегодня называется математикой, вообще трудно представить себе все развитие интеллектуальной мысли человечества.

В религиозном учении Пифагора, которое принципиально отличалось от широко распространенной в греческом мире религии, нужно различать две стороны: практическую (известный «образ жизни») и теоретическую (определенную совокупность учений). Многие основные черты религиозной секты, созданной им, в практической части были навеяны различными мистическими и религиозными восточными сектами и религиями. В основе практической части пифагорейской религии лежал особый ритуал и целая система табу. Пифагор ввел собственный обряд жертвоприношений и установил богослужение. Сверх того, он дал целый ряд правил поведения, которые назывались «акусмата» и которые характеризовали «пифагорейский образ жизни». Эти предписания были никак не мотивированными и основывались только на авторитете Пифагора. Основной целью этой религии было спасение души, что достигается путем «пифагорейского образа жизни».

Однако пифагорейство не занимало бы в истории духовной культуры столь выдающегося места, если бы его деятельность сводилась к насаждением примитивных суеверных обрядов.

«Но что отличало пифагорейцев от всех других (сект – Е.Л.), – это способ, при помощи которого они считали возможным достигнуть очищения души и соединения с божеством; это делалось при помощи математики. Математика была одной из составных частей их религии. Бог, учили они, положил числа в основу мирового порядка. Бог – это единство, а мир – множество и состоит из противоположностей. То, что приводит противоположности к единству и соединяет все в космос, есть гармония. Гармония является божественной и заключается в числовых отношениях. Кто до конца изучит эту божественную числовую гармонию, сам станет божественным и бессмертным.

Музыка, гармония и числа – эти три понятия были неразрывно связаны друг с другом в учении пифагорейцев. Все три были существенными составными элементами пифагорейской системы воспитания и очищения души. “Блаженство есть знание совершенства чисел души”, – говорит

Пифагор у Гераклита Понтийского. Математика и числовая мистика были фантастически перемешаны в его учении. Однако из этого мистического учения в дальнейшем выросла точная наука поздних пифагорейцев» (Ван дер Варден, 12, с. 129).

Создание математики как теоретической науки можно связать с несколькими принципиальными моментами, которые касаются личности Пифагора. Это может в определенной степени пояснить значение математики, но не объяснить ее возникновение.

Во-первых, Пифагор был главой некой секты, а его учение имело характер религиозно-мистического, которое в своем дальнейшем развитии превратилось в науку.

«Посвященные в этот орден после испытательного срока и строгого отбора могли слушать из-за занавеса Учителя, но видеть его самого они могли только через несколько лет, когда их души были очищены музыкой и строгой жизнью согласно обетам. Полагали, что эти очищения, а также посвящение в тайны гармонии и чисел приближают душу к божеству и таким образом она сможет освободиться из круга повторных воплощений. …

Таким образом, очищение и посвящение были для пифагорейцев общими с разными другими мистическими религиями. Стремление уйти от мира, замкнутая монашеская жизнь, вегетарианство и общность имущества встречалась у многих сект. Но что отличало пифагорейцев от всех других, – это способ, при помощи которого они считали возможным достигнуть очищения души и соединения с божеством; это делалось именно при помощи математики. Математика была одной из составных частей их религии» (Ван дер Варден, 12, с. 128-129).

Так как Пифагор и его ученики жили одной сплоченной общиной, постоянно общаясь между собой, то на эту общину можно посмотреть как на первую научную математическую школу. Эта «школа» обладала своими специфическими особенностями. Поступлению, обучению и участию в «школе» предшествовал строгий интеллектуальный отбор, который был растянут во времени, что позволяло выделить способных участников. Таким образом, секта (орден) Пифагора представляла собой специально отобранный «научный» коллектив, вся текущая деятельность которого была направлена на получение «научных» результатов. Внутренний распорядок, моральные требования к последователям и сама личность Пифагора были сосредоточены на создании атмосферы коллективного труда. Эта атмосфера выражалась в том, что авторство всех полученных учениками математических утверждений приписывалось Пифагору. В силу того, что учение Пифагора было окружено тайной в течение достаточно длительного срока, то трудно выделить из математического наследия пифагорейцев ту часть математических достижений, которая принадлежит собственно Пифагору.

После смерти Пифагора его школа распалась на два движения. Последователи одного движения, у истоков которого стоял Гиппас, стали называть себя «математиками» и перестали выполнять обеты, установленные пророком, в противоположность «акузматикам», которые строго держались священных правил жизни и благоговейно передавали друг другу *akusmata* – священные изречения. Дальнейшее развитие пифагорейских «математиков» и привело к созданию и развитию математики как теоретической науки.

«…Тот, кто хочет идти вперед в области науки, не может рассматривать ее как тайное учение только для одних посвященных. Он должен знакомиться с результатами исследований других, а в таком случае невозможно умалчивать и о своих собственных. И тогда он неминуемо должен прийти к конфликту с обетом молчания» (Ван дер Варден, 12, с. 149).

Наличие школы и многочисленных учеников – это условия, необходимые для того, чтобы математика из индивидуального учения и занятия превратилась в общественное занятие. Трудно себе представить другую, более благоприятную ситуацию для возникновения и развития математики как общественного занятия. Во всяком случае, в истории интеллектуального развития человечества невозможно отыскать ничего подобного. Конечно, в истории можно найти такие мистические учения и религии, в основании которых главную роль играли харизматические личности. Некоторые из них существуют и по сей день, но эти религии и учения не дали человечеству в интеллектуальном плане ничего подобного, сравнимого с математикой.

Резюмируя вышесказанное, отметим, что математика смогла стать теоретической наукой ***только*** благодаря тому, что она при своем возникновении была частью некой религии, от которой впоследствии отделилась.

Во-вторых, Пифагор воспринял и развил принятый в восточных религиях и учениях подход к понятию числа. Число стало предметом его культа, элементом религиозного сознания, которое он стремился привить своим последователям. Одна из целей его учения заключалась в стремлении постичь смысл чисел и числовых соотношений, ибо в них, по его мнению, содержится вся сущность мироздания. Изучение чисел и числовых соотношений, а также занятия музыкой были важнейшими элементами в процессе очищения человеческой души.

«Начало всего – единица; единице как причине подлежит как вещество неопределенная двоица; из единицы и неопределенной двоицы исходят числа; из чисел – точки; из точек – линии; из них – плоские фигуры; из них – чувственно-воспринимаемые тела, в которых четыре основы – огонь, вода, земля и воздух; перемещаясь и превращаясь целиком, они порождают мир – одушевленный, разумный, шаровидный, в середине которого – земля; и земля шаровидна и населена со всех сторон» (Диоген Лаэртский, 39, с. 313).

Об отношении Пифагора к числам нечто подобное можно прочесть у Порфирия (III в. н.э.) в его книге “Жизнь Пифагора”:

“Первообразы и первоначала, говорил он (Пифагор — Е.Л.), не поддаются ясному изложению на словах, потому что их трудно уразуметь и трудно высказать, оттого и приходится для ясности обучения прибегать к числам. ... Так понятие единства, тождества, равенства, причину единодушия, единочувствия, всецелости, то, из-за чего все вещи остаются самими собой, пифагорейцы называют Единицей; Единица эта присутствует во всем, что состоит из частей, она соединяет эти части и сообщает им единодушие, ибо причастна к первопричине. А понятие различия, неравенства, всего, что делимо, изменчиво и бывает то одним, то другим, они называют Двоицею; такова природа Двоицы и во всем, что состоит из частей. И нельзя сказать, что эти понятия у пифагорейцев были, а у остальных философов отсутствовали, - мы видим, что и другие признают существование силы объединяющей и разъединяющей целое, и у других есть понятия равенства, несходства и различия. Эти-то понятия пифагорейцы для удобства обучения и называют Единицей и Двоицей: это у них значит то же самое, что “двоякое”, “неравное”, “инородное”. Таков же смысл и других чисел: всякое из них соответствует какому-нибудь значению” (Диоген Лаэртский, 39, с. 424).

Такой подход к понятию числа полностью исключает его из практической жизни, из использования в решении прикладных задач. Еще раз подчеркнем принципиальное отличие прематематических чисел от математических. *Если числа, употребляемые в прематематике, являются прагматическими объектами, которые обладают определенными свойствами, позволяющими их использовать при решении практических задач, то числа, которые использовал Пифагор в своем учении, являются интеллектуальными объектами и рассматриваются как священные (мистические) объекты, не связанные с практической жизнью, а олицетворяющие некие общечеловеческие истины*. Это означает, что мы можем утверждать: происхождение математических чисел никак не связано с прематематическими числами, по крайней мере, на ранних этапах развития пифагорейства.

Отношение греков к математическим числам можно понять только в том случае, если опереться на пифагорейскую философию. В дошедшей до нас форме пифагорейской философии основные ее понятия рассматриваются с четырех сторон – арифметической, геометрической, физической и теологической, – как бы заключенных одна в другой. Так, например, первоначало мира – единица, или монада, есть в то же время предел (ограничивающее начало пространства), центральный огонь и Мать богов. Оно, таким образом, предстает в четырех формах. И подобным же образом любое понятие у пифагорейцев занимает определенное место в каждой из этих четырех параллелей: арифметической, геометрической, физической и теологической.

Поэтому-то у пифагорейцев, с одной стороны, числа суть сущность всех вещей, с другой – числа принимают пространственные образы. Кроме того, эти числа есть нечто материальное, и наконец, они – священны, божественны. Числа как *арифметические* принципы выражают закономерность, необходимость Логоса (разума), отличную от необходимости Судьбы. Числа как *геометрические* принципы уже не суть чистое количество, это – силы, образующие из неограниченного, беспредельного пространства определенные формы. Числа как *физические* принципы суть материальные вещества, в которых объективированы закономерность, порядок, гармония. И, наконец, числа как теологические принципы обладают таинственными, магическими свойствами и суть божественные существа. Число, рассматриваемое со всех четырех сторон вместе, есть сущность всего существующего, высшая объективная реальность.

Числа Пифагора выражали некую *мистическую сущность*, которая пришла с Востока и которая была связана с определенным типом интеллектуального познания. Например, брак выражается числом 5, так как оно есть результат сложения первого женского (четного) числа 2 и первого мужского (нечетного) числа 3. Любовь и дружба выражаются числом 8, так как гармония находит свое отражение в октаве.

«…так называемые пифагорейцы, занявшись математическими науками, впервые развили их и, воспитавшись на них, стали считать их начала началами всех вещей. Но в области этих наук числа занимают от природы первое место, а у чисел они усматривали, как им казалось, много сходных черт с тем, что существует и происходит, – больше, чем у огня, земли и воды; например, такое-то свойство чисел есть справедливость, а такое-то – душа и ум, другое – удача, и можно сказать, что в каждом из остальных случаев точно так же. Кроме того, они видели в числах свойства и отношения, присущие гармоническим сочетаниям. Так как, следовательно, все остальное явным образом уподоблялось числам по всему своему существу, а числа занимали первое место во всей природе, элементы чисел они предположили элементами всех вещей и всю вселенную признали гармонией и числом» (Аристотель, 3, кн.1, гл. 5, с. 4.).

В качестве чисел Пифагор рассматривал только целые положительные числа (так называемые натуральные числа), *за исключением единицы и двойки*, которые не считались числами. Единое, или единицу, пифагорейцы ставили в особое положение: единица для них – это не просто число, как все остальные, а начало чисел; чтобы стать числом, все должны приобщиться к единице – она же единство. «Единица есть то, через что каждое из существующих считается единым». Это определение единицы, которое дает Евклид в «Началах». Двойка или двоица также имела определенный философский смысл, связанный с противопоставлением. Числа начинались с тройки.

Новое понимание числа могло возникнуть только тогда, когда существенным стало различение чисел четных и нечетных, первых (простых) и вторых (сложных). Кроме того, этому соответствовало стремление проанализировать отношения между числами, формы их связи между собой, что привело к установлению отношений, прежде всего, двух последовательных чисел натурального ряда, n и n+1. Здесь можно отметить три момента.

Во-первых, это выбор основного совершенного числа как «священного», которым у пифагорейцев стала десятка, поскольку, по их убеждению, она содержит в себе всевозможные типы числовых соотношений. *Во-вторых* – сходная с древневосточными традициями сакрализация числа и соответствующая ей тенденция вскрывать десятеричную основу во всем существующем. *В третьих* – новый подход к анализу священного числа с целью раскрыть в нем возможные числовые отношения. При этом главным оказываются внутренние связи между числами, что приводит к установлению важнейших математических положений.

Особую роль в учении пифагорейцев играли числа 1, 2, 3, 4, образовавшие *тетрактис,* или *четверику,* которая в сумме давала десятку. По преданию, клятва пифагорейцев гласила:

«Благослови нас, о божественное число, породившее богов и людей! О святая, святая Тетрактис! В тебе источник и корни вечно цветущей природы! Ибо это божественное число начинается чистой и глубокой единицей и достигает священной четверки; затем оно порождает праматерь всего сущего, ту, что все объединяет, ту, что первой родилась, ту, что никогда не отклоняется в сторону, ту, что никогда не утомляется, священную Десятку, ключ ко всем вещам».

О таком отношении к Десятке говорит и Порфирий в упомянутой выше книге:

“Вот на каких основаниях располагают они (пифагорейцы - Е.Л.) вышеназванные числа. Точно так же и последующие числа подчинены у них единому образу и значению, который они называют Десяткой (т.е. “обымательницей”)— Е.Л.)... Поэтому они утверждают, что десять — это совершенное число, совершеннейшее из всех, и что в нем заключено всякое различие между числами, всякое отношение их и подобие. В самом деле, если природа всего определяется через отношения и подобия чисел и если все, что возникает, растет и завершается, раскрывается в отношениях чисел, а всякий вид числа, всякое отношение и всякое подобие заключены в Десятке, то как же не назвать Десятку числом совершенным?” (Диоген Лаэртский, 39, с. 424-425).

Пифагорейцы считали, что объекты природы состоят из четверок, таких, как четыре геометрических элемента: точка, линия, плоскость и тело. Отголоски этого находим у Платона и Аристотеля, которые считали, что основные материальные элементы составляют четверку: это земля, воздух, огонь и вода.

Для ранних пифагорейцев характерно стремление к выделению совершенных чисел, т.е. таких, в которых воплощаются особенно значимые, с их точки зрения, связи природы и человеческой души. Такое рассмотрение числа восходит к мифологической и культовой символике, но у пифагорейцев операции с совершенными числами ведут к установлению числовых соотношений, которые сыграли значительную роль в развитии математики.

Именно переход от отдельных совершенных чисел к выявлению инвариантных пропорциональных отношений между числами и придания им мистического и религиозного содержания отличает пифагорейцев от последователей более ранних мистических и религиозных восточных учений. Они обнаружили, что числа вступают между собой в определенные отношения, что их произведения, суммы, разности дают некоторые значимые сочетания, что именно эти сочетания – а не просто сами числа – выражают собой вещи и их закономерности.

То обстоятельство, что отношение к числу как к чему-то священному и анализ реальных форм связей между числами соединяются, очень важно для генезиса математики как систематической теории. В самом деле: *во-первых*, искомые и находимые связи между числами, числовые пропорции выступают как основа и фундамент всех природных явлений и процессов; *во-вторых*, поиски связей и единства всех возможных закономерностей числа становятся центральной задачей исследования.

Изучая взаимоотношения между натуральными числами, пифагорейцы ввели много новых математических понятий, на основании изучения которых они установили значительное число утверждений. Эти утверждения и легли в основу той математической дисциплины, которую называют *теорией чисел*.

Исходя из пифагорейского понимания числа, можно утверждать, что свойства математических чисел принципиально отличаются от свойств прематематических чисел. Только благодаря тому, что в название обоих объектов входит слово «число» и эти названия в употреблении подменяют друг друга, произошла историческая путаница, которая не дала возможности своевременно отделить прематематику от математики. Еще раз подчеркнем, что математические числа у греков употреблялись в религии, в философии, в то время как в логистике использовались прематематические числа.

В-третьих, пифагорейское учение о числе и числовых соотношениях, как мы уже говорили, было попыткой объяснения всей структуры мироздания с помощью числа как первоначала. Основы философии пифагорейцев базируются на различных противоположностях, перечисление которых можно найти у Аристотеля. Среди них есть, например, такие, как «нечет – чет», «прямое – кривое», «предел – беспредельное», «квадрат – параллелограмм». Из этих противоположностей строится все существующее, и само число рассматривается как состоящее из противоположностей – чета и нечета. Согласно Аристотелю, «элементами числа они считают чет и нечет, из коих первый является неопределенным, а второй определенным; единое состоит у них из того и другого – оно является и четным, и нечетным, число образуется из единого, различные числа, как было сказано, это вся вселенная».

Уже из приведенных выше слов Аристотеля видно, что в отличие от Фалеса, Анаксимандра, Анаксимена и других философов (в том числе и Аристотеля), которые видели сущность мира в прагматических объектах, Пифагор был первым, который видел сущность мира в интеллектуальном объекте, благодаря чему он стал основателем одного из главных течений философской мысли.

В астрономии (астрологии), музыке и арифметике пифагорейцы увидели общие числовые пропорции, гармонические соотношения, познание которых, согласно им, и есть познание сущности и устройства мироздания. Из текстов, приписываемых Филолаю и дошедших до нас, ясно видно, что уже в V веке до н.э. пифагорейцы размышляли о возможности познания и сформулировали положение, ставшее затем кардинальным для их философии познания, а именно: точное знание возможно лишь на основе математики. Это положение сформулировано в следующих словах, приписываемых Филолаю: «Ибо природа числа есть то, что дает познание, направляет и научает каждого относительно всего, что для него сомнительно и неизвестно. В самом деле, если бы не было числа и его сущности, то ни для кого не было бы ничего ясного ни в вещах самих по себе, ни в их отношениях друг к другу». Этими словами сформулирован принцип, составляющий основу греческой теории познания, которая более двух тысяч лет господствовала в западноевропейской философии. «То, в чем не обнаруживается “природа числа”, не может быть предметом познания. То, что не содержит числа, является беспредельным, а беспредельное непознаваемо».

С представлением о противоположности предела и беспредельного связана космология ранних пифагорейцев, согласно которой мир вдыхает в себя окружающую его пустоту, и таким образом в нем возникает множество вещей. Мир мыслится здесь как нечто завершенное, замкнутое (предел), а окружающая его пустота – как нечто аморфное, неопределенное, лишенное границ беспредельное.

Резюмируя сказанное, отметим, что созданная пифагорейцами *математика с момента своего возникновения являлась одним из видов интеллектуального познания, частью философии.* Только такой сплав религии и интеллектуальности мог дать стимул и моральное обоснование для значительного количества людей посвятить свою жизнь занятиям математикой.

В-четвертых, Пифагора и его учеников отличало и то, что они, по словам Аристотеля, не проводили принципиального различия между числами и вещами. «Во всяком случае, у них, по-видимому, число принимается за начало и в качестве материи для вещей, и в качестве выражения для их состояний и свойств…». Так как пифагорейцы смотрели на числа как на основу материального мира, то они еще не полностью отделяют их от чувственных вещей. В этом они еще близки к милетским натурфилософам в своем отношении к чувственному бытию. Поэтому пифагорейцы говорили о треугольных, квадратных, пятиугольных и тому подобных числах, которые были связаны с соответствующими многоугольниками, а также о линейных, плоских и телесных числах. В связи с этим Аристотель писал:

«…пифагорейцы признают одно – математическое – число, только не с отдельным бытием, но, по их словам, чувственные сущности состоят из этого числа: ибо все небо они устраивают из чисел, только у них это – не числа, состоящие из отвлеченных единиц, но единицам они приписывают пространственную величину; а как получилась эта величина у первого единого, это, по-видимому, вызывает затруднение у них».

В качестве другой иллюстрации к описанному процессу изменения отношения к числу можно привести тот факт, что для пифагорейцев основным совершенным числом, как мы уже говорили выше, вместо семерки становится 10. Вот что пишет Спевсипп, ученик Платона, заменивший последнего на посту руководителя Академии:

«…10 заключает в себе все отношения равенства, превосходства, подчиненности, возможные между последовательными числами, и другие, а равно линейные, плоские и телесные числа, так как 1 есть точка, 2 – линия, 3 – треугольник, 4 – пирамида, и каждое из этих чисел первое в своем роде и начало ему подобных. А эти числа образуют первую из прогрессий, а именно разностную, и общая сумма ее членов – число 10… В плоских и телесных фигурах первые элементы также точка, линия, треугольник и пирамида, заключающиеся в числе 10 и в нем находящие свое завершение. Так, например, у пирамиды 4 угла или 4 грани и 6 ребер, что составляет 10. Интервалы и пределы точки и линии дают также 4, стороны и углы этого треугольника – 6, т.е. опять 10».

Такой подход к понятию числа и дал возможность пифагорейцам не только тесно увязать математику с философией, но и создать предпосылки к созданию геометрии.

В-пятых, еще одним принципиальным моментом пифагорейского учения были разработка и использование математических доказательств в качестве основы теологических рассуждений. Мы уже упоминали, что первым из греческих мыслителей, которые стали применять математические доказательства, согласно традиции, был Фалес. В отличие от Фалеса, который якобы доказал отдельные геометрические утверждения, Пифагор и его последователи, по существу, заложили основы математического доказательства, причем не только геометрических утверждений, но и теоретико-числовых утверждений.

Заметим, что Пифагор впервые доказал одноименную теорему (а может быть, это был кто-то из его учеников и последователей, который, как мы уже говорили об этом выше, согласно традиции приписал этот результат своему учителю), хотя сама теорема в конкретных числовых случаях встречается и у древних египтян, и у вавилонян. Все математические доказательства, выработанные Пифагором и его учениками, основывались на дедукции, а также на определенном выборе первичных базисных утверждений, которые послужили прообразом аксиом.

В то время, когда пифагорейцы с энтузиазмом искали подтверждения главного тезиса своего учения, что «все есть число», было сделано математическое открытие, заключающееся в том, что длины катета и гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника несоизмеримы, т.е. их отношение нельзя представить в виде отношения двух целых чисел (правильной гармонии). Это открытие сыграло важную роль в становлении математики как теоретической науки, ибо вызвало целый переворот в математическом мышлении и заставило пересмотреть те из представлений, которые при рождении математики казались само собой разумеющимися. Открытие несоизмеримости могло иметь место только там и тогда, где уже возникли основные контуры математики как целостной теоретической системы мышления. Ведь только тогда может возникнуть удивление, что дело обстоит не так, как следовало ожидать, если уже есть представление о том, как должно обстоять дело.

Последствием открытия несоизмеримости было усиление геометризации математики, выражавшиеся в том, что появилась тенденция геометрически выразить отношения, которые невыразимы с помощью арифметики целых чисел. Теперь числа стали обозначаться с помощью отрезков, углов и прямоугольников. Таким образом, пифагорейцами была создана геометрическая теория пропорций. На этом пути можно соотносить между собой не только рациональные числа, но и несоизмеримые величины. В конечном счете, по выражению Цейтена, пифагорейцами была создана *геометрическая алгебра*, которая нашла широкое применение вплоть до нового времени. Можно привести две причины, объясняющие этот феномен.

Первую причину мы привели выше. Она заключается в том, что на этом пути можно производить различные вычисления, в которых якобы участвуют дроби и иррациональные числа. В результате таких «вычислений» греки получали геометрические объекты: отрезки, площади геометрических фигур, объемы геометрических тел. Напомним, что греки официально не признавали этих чисел по различным философским и чисто математическим причинам, хотя они постоянно у них возникали в связи с изучением различного сорта пропорций и отношений. Поэтому в случае возникновения соответствующих задач, их формулировали и решали на геометрическом языке.

Вторая причина заключалась в том, что на этом пути можно было *доказывать* различные алгебраические соотношения. Греки не могли доказывать алгебраические соотношения в рамках алгебры, ибо они не обладали системой аксиом теории чисел. Все утверждения, которые они выводили в рамках теории чисел, были следствиями из определений, либо некоторым объяснением на основе аналогии. К таким утверждениям, например, относится известное алгебраическое «доказательство» того, что не является рациональным числом. Это рациональное рассуждение нельзя назвать математическим доказательством во времена пифагорейцев, ибо оно не основывается на аксиомах. Указанное рассуждение становится математическим доказательством только в конце XIX века, когда была построена система аксиом теории целых чисел.

В то же время греки обладали системой аксиом в геометрии. Поэтому они вместо алгебраических утверждений, которые формулировали словесно, рассматривали геометрическую интерпретацию этих утверждений. Доказанную геометрическую теорему они рассматривали как «доказательство» истинности алгебраического выражения. Такой подход с современной точки зрения вряд ли можно признать логически обоснованным, ибо из того, что некая интерпретация некоторого утверждения является истинной, никак не следует, что и само первоначальное утверждение является истинным.

Однако геометрический подход в большинстве рассматриваемых случаях не приводил к ошибочным утверждениям, поэтому в течение многих веков доказательство геометрической интерпретации алгебраического утверждения рассматривалось как доказательство истинности алгебраического утверждения.

Высшего триумфа разум достигает, когда ему удается зародить сомнение в собственной годности.

Мигель де Унамуно

3.4. Зенон.

Открытие несоизмеримости стало первым толчком к осознанию методологических оснований математического исследования, к попытке не только найти новые методы работы с величинами, но и понять, что такое величина. Дело в том, что те понятия числа, точки, фигуры и т.п., которыми первоначально оперировали пифагорейцы, не были ими логически прояснены и продуманы. Вопрос об их прояснении с логической точки зрения был впервые поставлен философами элейской школы, основателем которой был Парменид.

«Историческое значение Парменида состояло том, что он изобрел форму метафизической аргументации, которая в том или ином виде может быть обнаружена у большинства последующих метафизиков, включая Гегеля. Часто говорят, что Парменид изобрел логику, но в действительности он изобрел метафизику, основанную на логике» (Б. Рассел, 53, с. 67).

«Парменид признавал "два естества": "истинно сущее", которое постигается только разумом, и "мнимое существующее" или "существующее лишь во мнении", о котором мы составляем суждения на основании ощущений. Последние суждения носят вероятностный характер, в них не заключается "подлинной достоверности". "Истинно сущее" познается только с помощью логических рассуждений. Несколько модернизируя, можно сказать, что для элеатов существовать означало быть непротиворечивым. Именно Парменид впервые высказал логические законы тождества и исключенного третьего и применял их в своих доказательствах» (История математики, 32, т.1, с. 89).

В элейской школе впервые предметом логического мышления стали проблемы бесконечности и непрерывности. Основной вклад в этом направлении внес Зенон, которого Аристотель назвал «изобретателем диалектики». Он впервые вскрыл противоречия, в которые впадает мышление при попытке постигнуть, в частности, бесконечность, непрерывность и делимость в понятиях.

Эти противоречия он ярко представил с помощью парадоксов (или апорий). Парадоксы Зенона свидетельствовали о первом кризисе оснований математики, для возникновения которого было необходимо, чтобы математика достигла определенного уровня. Именно такого уровня и достигла пифагорейская математика. Парадоксы Зенона впервые поставили на обсуждение проблему бесконечности и связанную с нею проблему континуума, лежащую в основе таких понятий, как пространство, время и движение.

Из 45 апорий, выдвинутых Зеноном, до нас дошло 9. Мы обсудим ниже только четыре апории, которые относятся к анализу движения: «Дихотомия», «Ахиллес и черепаха», «Стрела» и «Стадион». Они нам известны, прежде всего, из «Физики» Аристотеля. Апории Зенона касаются самих основ человеческого миропонимания, ибо они показывают, что чувственное восприятие движения приводит к противоречию.

«Есть четыре рассуждения Зенона о движении, доставляющие большие трудности тем, кто пытается их разрешить. Первое – о несуществовании движения на том основании, что перемещающееся должно дойти до половины, прежде чем дойти до конца… Второе – так называемый «Ахиллес»; оно состоит в том, что самое медленное никогда не сможет быть настигнуто в беге самым быстрым, ибо преследующему необходимо прежде прийти в место, откуда уже двинулось убегающее, так что более медленное всегда должно на какое-то опережать.

Третье … состоит в том, что летящая стрела стоит неподвижно; оно вытекает из предположения, что время слагается из "теперь"; если этого не признавать, силлогизма не получится.

Четвертое относится к равным предметам, движущимся по ристалищу с противоположных сторон мимо равных предметов; одни с конца ристалища, другие от середины, имея равную скорость, откуда, по его мнению, получается, что половина времени равна ее двойному количеству. Паралогизм состоит в том, что одинаковая величина, двигаясь с равной скоростью один раз мимо движущегося, а другой раз мимо покоящегося, затрачивает на это рав-ное время, но это неверно» (Аристотель, 2, с. 199-200).

Рассмотрим эти апории в применении к математике. Апория «Ахиллес и черепаха» утверждает, что Ахиллес никогда не догонит черепаху. Эта апория основывается на тезисе о невозможности завершить движение из-за необходимости посетить последовательно каждый отрезок из бесконечного упорядоченного множества отрезков, которое не имеет последнего отрезка. На схожих аргументах основывается и следующая апория – «Дихотомия», которая утверждает невозможность начала движения, ибо здесь мы сталкиваемся с бесконечной упорядоченной последовательностью отрезков, которая имеет последний элемент, но не имеет первого элемента. Обе эти апории опираются на допущение о непрерывности пространства и времени в смысле их бесконечной делимости. Без этого допущения обе апории рушатся. Две другие апории утверждают, что движение невозможно даже в том случае, если допустить дискретность пространства и времени, т.е. допустить существование элементарных, далее неделимых, длин и промежутков времени.

Для математики имеет большое значение также и другой парадокс, который получил название «парадокс меры». Этот парадокс Симпликий излагает следующим образом: «Доказав, что, “если вещь не имеет величины, она не существует”, Зенон прибавляет: “Если вещь существует, необходимо, чтобы она имела величину, некоторую толщину и чтобы было некоторое расстояние между тем, что представляет в ней взаимное различие“. То же можно сказать о предыдущей, о той части вещи, которая предшествует по малости в дихотомическом делении. Итак, это предыдущее должно иметь некоторую величину и свое предыдущее. Сказанное один раз можно всегда повторять. Таким образом, никогда не будет крайнего предела, где не было бы различных друг от друга частей. Итак, если есть множественность, нужно, чтобы вещи были в одно и то же время велики и малы, и настолько малы, чтобы не иметь величины, и настолько велики, чтобы быть бесконечными».

Этот парадокс направлен против пифагорейского представления о том, что тела «состоят из чисел». В самом деле, если мыслить число как точку, не имеющую величины (протяженности, толщины), то сумма таких точек (т.е. тело) тоже не будет иметь величины, если же мыслить число «телесно» (т.е. как вещь) как имеющее некоторую конечную величину, то поскольку тело содержит бесконечное число таких точек (ибо тело, по допущению Зенона, можно делить неограниченно), оно должно иметь бесконечную величину. Из этого следует, что невозможно мыслить тело в виде суммы неделимых единиц, как это делают пифагорейцы. Другими словами, если «единица» неделима, то она не имеет пространственной величины (т.е. это точка); если же она имеет величину, пусть как угодно малую, то она делима до бесконечности.

Зенон впервые поставил перед математикой вопрос, который является одним из важнейших методологических вопросов и по сей день: как следует мыслить континуум – дискретным или непрерывным, состоящим из отдельных неделимых единиц (точек) или делимым до бесконечности? Актуальность постановки этого вопроса не уменьшилась со временем. В качестве примера можно привести суждение А. Пуанкаре, который через две с половиной тысячи лет обсуждает этот вопрос в своей книге «Наука и гипотеза», вышедшей в свет в начале XX века. Любая величина должна быть понята теперь с точки зрения того, состоит ли она из единиц или она сама есть целое, а составляющие ее элементы самостоятельного значения не имеют. Этот вопрос ставится и по отношению к числу, и по отношению к пространственной величине (линии, плоскости, объему), и по отношению ко времени.

Апории Зенона вскрыли проблемы, которые оказались принципиальными для развития не только математики, но и философии, и физики. Трудно найти философа того времени, который не уделил бы внимания попыткам найти объяснение этим парадоксам. Среди них можно встретить и двух великих философов – Платона и Аристотеля, – каждый из которых своим путем пытался найти решение этим апориям. Однако проблемы, вскрытые Зеноном, продолжают интересовать и современных философов математики. Само существование апорий Зенона еще раз свидетельствует о принципиальном отличии математики от прематематики, в которой подобные вопросы не могли возникнуть.

То, чему они (софисты — Е.Л.) учили, в их представлении не было связано с религией и моралью. Они учили искусству спора и давали столько знаний, сколько было для этого необходимо. Вообще говоря, они могли, подобно современным адвокатам, показать как защищать или оспаривать то или иное мнение, и не заботились о том, чтобы защищать свои собственные выводы.

Б. Рассел

3.5. Софисты: Протагор и Сократ.

Одной из основных черт, присущих математике, является прежде всего проведение математических доказательств, т.е. проведение рассуждений, подчиняющихся определенным жестким правилам. Следовательно, для проведения математических доказательств, во-первых, необходимо выработать и знать правила, а во-вторых, научиться осуществлять проверку своих рассуждений относительно их соответствия установленным правилам. Необходимость такой постоянной проверки приводит к скептицизму. Этому здоровому и обоснованному скептицизму, связанному только с процессом проведения рассуждений, математика обязана софистам. Без участия софистов вряд ли здание математики было бы построено.

Имена греческих философов Протагора и Сократа непосредственно не связаны с математикой. Деятельность одного из них, Протагора, положила начало новому этапу в развитии греческой философии. Он стал родоначальником философской школы софистов, одной из главных целей которой стала выработка основных принципов ведения диспутов. Найденные им приемы сформулировали логику проведения интеллектуальных рассуждений и утверждений. Другому великому греческому философу, Сократу, принадлежит развитие диалектического метода, состоящего в приобретении знаний путем вопросов и ответов.

«Вопросы, которые могут быть рассмотрены посредством метода Сократа, – это те вопросы, о которых мы уже имеем достаточно познания, чтобы прийти к правильному выводу, но из-за путаницы или недостаточного анализа не сумели логически использовать то, что мы знаем» (Б. Рассел, 53, с. 112).

Вопросы логики проведения математического доказательства полностью укладываются в то русло, которое требует метод Сократа. Именно поэтому достижения этой школы впоследствии послужили основой для выработки способов проведения математических доказательств. Так как без математического доказательства нет и математики как теоретической науки, то поэтому мы посчитали нужным отдать дань софистам как существенным участникам развития математики. Уникальность этой школы, присущей греческому духу и складу жизни, явилась одной из причин, что математика, как интеллектуальное познание, возникла только у греков.

Одним из самых важных вкладов софистов было то, что они, в первую очередь, являлись учителями и распространителями знаний, в частности, математики. В состоятельных греческих домах было принято нанимать софистов для обучения подрастающего поколения умению вести споры, выступать перед аудиторией, а также различным видам знаний. Собственно, обучение у софистов было единственным способом получения интеллектуальных знаний в греческом обществе вне небольшого числа академий. Так как софисты брали плату за обучение, то этого сорта знания были доступны только состоятельной части греческого общества.

Именно стремление греков распространить свои знания прежде всего среди своего народа, а затем и среди других народов, позволило им сохранить и передать впоследствии другим народам и цивилизациям свои знания, в частности, математику.

При помощи математики очищается и получает новую жизненную силу орган души, в то время как другие занятия уничтожают его и лишают его способности видеть, тогда, как он значительно более ценен, чем тысяча очей, ибо только им одним может быть обнаружена истина.

Платон

Он (Платон — Е.Л.) был в достаточной степени пифагорейцем, чтобы считать, что без математики невозможно достичь подлинной мудрости.

Б. Рассел

3.6. Платон.

Пифагорейское представление о математическом фундаменте научного знания получило теоретическое обоснование и весьма четкое выражение в трудах Платона. У него мы находим изложение пифагорейского учения о числе и числовых пропорциях геометрических величин, общие принципы построения геометрии, а также систематизацию различных областей математического знания, соединение их в единую систему наук. Он впервые применил способ «доказательства от противного» как один из методов проведения интеллектуальных рассуждений. Его ученики стали использовать этот прием как элемент математических доказательств. Платон преподавал своим ученикам философию, а они учили его математике. Среди них были выдающиеся математики древности Архит Тарентский, Теэтет и Евдокс. Это содружество оказалось очень важным и плодотворным для развития математики и философии.

Из платоновского обоснования математики и науки можно сделать следующие выводы. *Во-первых*, математика является образцом науки как таковой. Однако она уступает высшему знанию, которое Платон называет диалектикой, что по Платону есть синоним философии. Объяснение этого заключается, в частности, в том, что математика нуждается в некоторых предпосылках, которые нельзя доказать в рамках математики, и их необходимо принять в качестве истинных утверждений. *Во-вторых*, математика оперирует с интеллектуальными объектами, и в этом содержится основа строгости ее выводов и определенности ее понятий. *В-третьих*, математика имеет дело с интеллектуальными объектами разной степени строгости и логической чистоты: арифметика – с числами, являющимися чисто интеллектуальными продуктами, геометрия – с пространственными фигурами, промежуточными образованиями, для создания которых приходится придавать числам как бы пространственный облик, что и является делом человеческого воображения.

Прежде всего, рассмотрим взгляды Платона на понятие числа. Для него число – это единство предела и беспредельного. Такого рода единство противоположных начал Платон усматривает не только в чувственных вещах, но и в сфере идеального – того, что постигается лишь с помощью мысли. Естественно поэтому, что число – это идеальное образование, возникшее в результате сочетания противоположностей. Предел, будучи соотнесенным с беспредельным, вносит, по существу, определенную меру. Мера означает «согласие» между двумя противоположными началами – беспредельным и пределом. Подобное согласие порождает число. Число, таким образом, является единственным средством, с помощью которого можно дать определение чего-то постоянного, какого-либо предмета.

Но число является продуктом мышления, т.е. это объект из другой реальности, отличной от той, с которой мы соприкасаемся с помощью ощущений. Другими словами, для того, чтобы стало возможным выделить в беспредельном что-то одно, отличить это выделенное от другого, измерить его в каком-либо отношении, необходима иная реальность, которая позволяла бы осуществить в ней подобные процедуры. Эту реальность, которая, очевидно, является продуктом интеллекта, Платон и называет бытием. Но тогда мера выступает как посредник между сферами бытия и становления. А сама мера необходимо связана с числом.

Это означает, что при переходе от становления к бытию рождается число как средство упорядочивания и фиксирования чего-то постоянного. Число в этом случае выступает в качестве посредника между двумя сферами: становления и бытия. Важнейшая особенность числа – это его идеальность, в силу которой «его можно только мыслить». Числа представляют собой идеальные образования, идеи, а не явления самой эмпирической реальности, и поэтому они вводят человека в сферу, которая постигается только мышлением, т.е., на языке Платона, в сферу истинного бытия.

Именно число, а не само единое является средством постижения чувственного мира. «Воспринявший что-либо единое, – говорит Платон, – тотчас после этого должен обратить свой взор не на природу беспредельного, но на какое-либо число; так точно и наоборот: кто бывает вынужден прежде обращаться к беспредельному, тот немедленно вслед за этим должен смотреть не на единое, но опять-таки на какие-либо число».

Это отношение Платона к математике достаточно ясно выразил известный математик-логик Б. Рассел:

«Я должен согласиться с Платоном, что арифметика и чистая математика вообще не выводятся из восприятия; чистая математика состоит из тавтологий, аналогичных предложению “люди есть люди”, но обычно более сложных. Для того чтобы узнать, что математическое предложение правильно, мы не должны изучать мир, но лишь значения символов; и эти символы, когда мы обходимся без определений (цель которых состоит лишь в сокращении), окажутся такими словами, как “или”, “нет”, “все”, “несколько”, которые подобно “Сократу” в действительном мире ничего не обозначают. Математическое уравнение утверждает, что две группы символов имеют то же самое значение; и до тех пор, пока мы ограничиваемся чистой математикой, это значение должно быть таким, которое можно понять, не зная ничего о том, что может быть воспринято. Математическая истина поэтому, как утверждает Платон, независима от восприятия; но эта истина совершенно особого рода, и она имеет дело только с символами”. (Б. Рассел, 53, с. 176)

Таким образом, в отличие от пифагорейцев, у которых не существовало различия чисел от вещей, Платон такое различие устанавливает. Аристотель утверждает, что Платон «полагает числа отдельно от чувственных вещей, а они (пифагорейцы – *Е.Л.*) говорят, что числа – это сами вещи, и математические объекты в промежутке между теми и другими не помещаются. Установление единого и чисел отдельно от вещей, в отличие от пифагорейцев, а также введение понятия идей произошло вследствие исследования в области понятий (более ранние философы к диалектике не были причастны)».

Как и пифагорейцы, Платон придает числам божественное значение.

«Давайте рассмотрим, как мы научились считать. Скажите: откуда у нас появилось понятие единицы, двойки? Почему только мы одни из всех живых веществ по своей природе можем иметь это понятие? … Нам впервые привил Бог понимание того, что нам показывает до сих пор. Происходит беспрестанная смена многих вещей и дней. Небо совершает это беспрестанно, научая людей понятию единицы и двойки, так что наконец и самый неспособный человек оказывается в состоянии усвоить счет. Созерцая это, каждый из нас может получить понятие о числах “три”, “четыре” и о “множественности”».

«Что число не вызывает ничего дурного, это легко распознать, как это вскоре будет сделано. Ведь чуть ли не любое нечеткое, беспорядочное, безобразное, неритмичное и нескладное движение и вообще все, что причастно чему-нибудь дурному, лишено какого-либо числа. Именно так должен мыслить об этом тот, кто собирается блаженно окончить свои дни. Точно так же никто, не познав числа, никогда не сможет обрести истинного мнения о справедливом, прекрасном, благом и других подобных вещах и расчленить это для себя и для того, чтобы убедить другого».

Более того, число внутренне связано с прекрасным, благим и священным, а поэтому отнюдь не есть нечто нейтральное по отношению к ценностям. Именно с понятием числа Платон связывает порядок, упорядочивание, ритм, склад (лад), гармонию, согласованность, меру, соразмерность, а все это – атрибуты не только прекрасного, но и доброго, благого, и оно же и истинное. Поэтому в самом числе выделяется и подчеркивается то, что несет эти атрибуты.

Следовательно, по Платону, число – это идеальное образование, его нельзя воспринимать чувственно, а можно только мыслить. В чувственном мире невозможно найти «единицу, которая ничем не отличалась от другой», – любой предмет чувственного мира, любая чувственная «единица» отличается от другого предмета, от другой «единицы», тождественны они лишь с точки зрения того, что каждый из предметов мыслится как «один», а «один» равен «одному» только в мире идеализаций. Как образования идеальные и постижимые только мыслью, числа не отличаются от идей.

Важным моментом в платоновском обосновании числа как чисто интеллектуального образования является положение о принципиальной неделимости единицы – неделимости логической, поскольку сама единица мыслится как логическое начало. Согласно Платону, наука о числах «влечет душу ввысь и заставляет рассуждать о числах самих по себе, ни в коем случае не допуская, чтобы кто-нибудь подменял их имеющими число видимыми и осязаемыми телами. Ты ведь знаешь, что те, кто силен в этой науке, осмеют и отвергнут попытку мысленно разделить самое единицу, но если ты все-таки ее раздробишь, они снова умножат части, боясь, как бы единица не оказалась не единицей, а многими долями одного».

Единица неделима, ибо она есть единое неделимое по определению. Единица – это, собственно, не число, а «начало» чисел вообще, это единое, вносящее принцип определенности в беспредельное. Это означает, что единица – это «единое», организующее и порождающее числовой ряд. Но единое для порождения числового ряда нуждается в «партнере» – неопределенной двоице, которая у Платона выступает как «начало иного». Множество рождается из единого и «неопределенной двоицы». И само множество имеет своим логическим условием единицу: ведь если нет единого, то нет и многого, поскольку многое – это множество единиц. Как говорил Платон: «Если единое не существует, то ничего не существует».

Платон ввел в рассмотрение так называемые «математические вещи», или «математические объекты». «Математические объекты» – это те образования, которыми оперирует не арифметика, имеющая дело с числами, а геометрия. Этими объектами являются геометрические фигуры, как на плоскости, так и в пространстве, а также их элементы. Все это, согласно сказанному, объекты мысли, но они в то же время могут иметь чувственные подобия, чувственные аналоги: в качестве таких подобий могут выступать любые рисунки этих геометрических фигур и тел, а также вещи, имеющие форму этих фигур и тел. Тем самым Платон впервые заговорил о геометрии как науке.

К интеллектуальным достижениям Платона относится и то, что он впервые в античной науке ввел понятие геометрического пространства в качестве интеллектуального философского понятия. В теории Платона оно, по существу, служило связью, мостом между миром идей и миром чувственных ощущений. Пространство состояло из той материи, с помощью которой числа превращались в математические (геометрические) объекты. На этом пути пространство становилось математическим понятием.

Естественно возникает вопрос о том, как все же рождаются геометрические фигуры в пространстве. Для объяснения этого процесса понадобилось понятие движения. Здесь мы впервые встречаемся со связью движения и геометрии, которая мыслилась настолько естественной, что движение не нашло никакого отражения в аксиомах, постулатах геометрии, например, у Евклида. Как мы уже говорили выше, во времена Платона ведущие математики того времени, как Архит, Евдокс и другие, большое внимание уделяли геометрическим задачам на построение, в которых использовали циркуль и линейку. В решениях геометрических задач на построение широко использовалось движение, ибо слово «построение» уже по своему смыслу, который вкладывается в него, содержит элементы движения. Так как при решении задач на построение было необходимо показать, что результат построения удовлетворяет тем требованиям, которые указаны в условиях задачи, что само по себе требует переноса или вращения геометрических элементов, то движение стало необходимым элементом математических доказательств в геометрии.

Нам сегодня трудно выяснить, как рассматривал сам Платон происхождение геометрических фигур в движении. Мы можем сослаться на некоторые комментарии неоплатоника Прокла к первому постулату Евклида, которые иллюстрируют, в определенном смысле, мнение последователей Платона.

«Возможность провести прямую из любой точки в любую точку вытекает из того, что линия есть течение точки, и прямая – равнонаправленное и не отклоняющееся течение. Представим, следовательно, себе, что точка совершает равнонаправленное и кратчайшее движение; тогда мы достигаем другой точки, и первое требование выполнено без всякого сложного мыслительного процесса с нашей стороны».

«Но если у кого-нибудь возникли затруднения относительно того, как мы вносим движение в неподвижный геометрический мир и как мы движем то, что не имеет частей (а именно точку), – ибо это ведь совершенно немыслимо, то мы попросим его не слишком огорчаться… Мы решили представлять движение не телесно, а в воображении; и мы не можем признать, что не имеющее частей (точка) подвержено телесному движению, скорее оно подлежит движениям фантазии. Ибо неделимый ум движется, хотя и не способом перемещения; также и фантазия, соответственно своему неделимому бытию, имеет собственное движение».

Таким образом, движение геометрической точки совершается в воображаемом мире: точка движется в фантазии. Это положение находится в прямом соответствии с утверждением Платона, что чертежи на песке представляют собой только чувственные подобия геометрических фигур. Следуя Платону, Прокл говорит, что телесное движение карандаша по бумаге есть телесный аналог, телесный образ движения бестелесной точки по бестелесной «бумаге» – пространству, т.е. движение, совершаемое в фантазии.

Как мы видим из сказанного выше, Платон различал три вида реальностей. «Есть бытие, есть пространство и есть возникновение». «Бытие» – это сфера идеального, куда Платон относит и числа. Все идеальное постигается умом, интеллектом, и только о нем возможно истинное знание. «Возникновение» – это сфера чувственного «бытия», оно основано на чувственном восприятии, и о нем возможно иметь лишь мнение. «Пространство» – это нечто такое, что нельзя назвать ни идеальным в строгом смысле этого слова, ни чувственным, оно смутно и неопределенно, и существовать в нем можно только с помощью воображения.

Геометрические фигуры и тела – это те объекты, которые существуют в пространстве с помощью воображения. Платон объяснял появление геометрических объектов следующим образом. Соединение единицы с пространством дает первый геометрический объект – точку. Как сказал Аристотель, точка – это «единица, имеющая положение». Получив положение, единица из идеального объекта превращается в «промежуточный» объект. Точка обладает двумя видами свойств. От единицы точка наследует неделимость. Ее нельзя разделить, так как она есть воплощение единого в пространстве. С другой стороны, точка, двигаясь в пространстве, порождает линию. Однако это движение происходит не в физическом пространстве, а в воображении, которое представляет собой нечто среднее между интеллектуальным мышлением и чувственным восприятием.

На двойку можно посмотреть с различных позиций. Например, двойка есть соединение двух единиц. Две точки, соединенные с пространством, становятся двумя точками, которые определяют линию. Тройка представляет собой первое число, ибо единица и двойка у Платона не являются числами. Геометрически тройка превращается в треугольник, который является первой пространственной фигурой.

При таком представлении соединение чисел с материей порождает геометрический объект нового измерения: единица не имеет измерения (точка), двойка имеет одно измерение – «длину без ширины» (отрезок), тройка имеет два измерения – длину и ширину (треугольник – логический образ плоскости). Наконец, четверка, соединившись с материей, образует тело (которое представляется тетраэдром).

Такое соединение чисел с геометрическими фигурами и телами продолжает пифагорейскую традицию. Однако если у ранних пифагорейцев числа были связаны с геометрическими фигурами и телами, которые являлись *реальными* вещами, то у Платона числа связаны с геометрическими фигурами и телами, рассматриваемыми как *воображаемые* фигуры и тела.

Платон знал о пяти правильных геометрических телах, открытых пифагорейцами, и о том, что их можно сопоставить с элементами Эмпедокла (воздух, огонь, вода, земля — Е.Л.). Наименьшие части элемента земли он ставил в связь с кубом, наименьшие части элемента воздуха — с октаэдром, элементы огня — с тетраэдром, элементы воды — с икосаэдром. Не было элемента, соответствующего додекаэдру. Здесь Платон сказал, — что существует еще пятый элемент, который бог использовал, чтобы создать Вселенную. Правильные геометрические тела в некотором отношении можно сравнить с атомами; однако Платон категорически отрицал их неделимость. Он конструировал свои правильные тела из двух видов треугольников: равностороннего и равнобедренного прямоугольного. Соединяя их, он получал грани правильных тел. Этим объясняется частичное превращение элементов друг в друга. Правильные тела можно разложить на треугольники, а из этих треугольников можно построить новые правильные тела. … Треугольники нельзя считать материей, так как они не имеют пространственного протяжения. Только в том случае, если треугольники объединены в правильные тела, возникает частица материи. Поэтому наименьшие частицы материи не являются первичными образованиями, как это имело место у Демокрита, и они представляют собой математические формы. Понятно, что в этом случае форма имеет большее значение, чем вещество, из которого форма состоит или в которой оно выявляется» (В. Гейзенберг, 20).

Платон, как и многие греки его времени, рассматривал геометрию как аксиоматическую теорию, причем принятие аксиом он обосновывал своей теорией воспоминаний – анамнезисом. Платон считал объективно существующим мир идей. До того, как человек появляется на свет, его душа обретается в мире идей и впитывает впечатления. Побуждаемая к воспоминаниям, душа затем восстанавливает накопленные ранее впечатления, чтобы признать истинность аксиом геометрии. Никакой земной опыт ей не требуется.

Все изложенное выше показывает, что Платон рассматривал математику как часть общей системы познания мира. Математика, по Платону, в том числе и геометрия, не имеет и не может иметь никакой связи с практической жизнью, с логистикой.

«Платон хотел не только понять природу с помощью математики, но и заменить математикой природу. Он считал, что более проницательный взгляд на физический мир дал бы возможность открыть основные истины, которые позволили бы разуму уже самостоятельно достроить все остальное. С момента обнаружения первичных истин дальнейшее было бы чистой математикой. Математика заменила бы физическое исследование» (М. Клайн, 34, с. 26).

А по общему признанию созерцание истины есть самая приятная из всех деятельностей, сообразных с добродетелью.

Аристотель

3.7. Аристотель.

Развитие науки определяется не только теми, кто непосредственно создает научные теории или делает открытия. В не меньшей степени развитие науки зависит и от тех, кто оказывает влияние на изменение самих методов мышления, способов подхода к предмету. Аристотель не был математиком, но его вклад в математику, а точнее, в метаматематику, трудно переоценить. Этот вклад можно разделить на три части. Первая часть касается разработки основ математического доказательства, которое является «сердцем» математики. Без этого «органа» – нет математики. Для этого Аристотель обобщил, а главное, формализовал процесс проведения интеллектуальных рассуждений. Его основным достижением в данном направлении было создание формальной логики, которая легла фундаментом в аристотелевскую теорию математического доказательства. Этот фундамент был достаточно прочным, ибо, как мы уже отмечали выше, для того, чтобы внести существенное изменение и дополнение в эту теорию, человеческой мысли потребовалось две тысячи лет.

Вторая и третья части вклада Аристотеля в математику касаются принципиального обсуждения двух тем, также лежащих в основании математики: проблемы континуума (непрерывности) и проблемы бесконечности. Глубину аристотелевского понимания этих вопросов удалось по настоящему оценить опять-таки через два тысячелетия, в XIX веке. Наше рассмотрение вклада Аристотеля в математику в этом пункте будет касаться только указанных тем. Обсуждение упомянутых вопросов Аристотель проводил, в основном, в споре со своим учителем Платоном.

Начнем с аристотелевых принципов математического доказательства. Это рассмотрение мы условно разделим на три части: логика Аристотеля, природа аксиом, построение математического доказательства.

Логика Аристотеля основана на учении о силлогизмах. Силлогизм есть утверждение, состоящее из трех элементов: большая посылка, меньшая посылка и заключение. Каждый элемент силлогизма представляет собой некое утверждение. Считается, что силлогизм — это собой *доказательство* заключения из двух посылок. Это значит, что если посылки представляют собой истинные утверждения, то и заключение является истинным заключением. Все силлогизмы, которые используются в логике, разбиты на типы (модусы), модусы разбиты на фигуры. В литературе обычно говорится о четырех фигурах. Доказано, что все фигуры силлогизмов можно свести к одной фигуре, состоящей из четырех модусов. Другими словами, силлогическая логика Аристотеля состоит из четырех модусов силлогизмов.

К логике Аристотель также относил и два принципа (закона), которые лежат в основе рационального мышления: принцип непротиворечия и принцип исключенного третьего. Принцип непротиворечия утверждает, что невозможно одновременно признавать, что одно и то же и существует, и не существует. Аристотель говорит: «Невозможно, чтобы одно и то же вместе было и не было присуще одному и тому же и в одном и том же месте ... это, конечно, самое достоверное из всех начал». Этот принцип является отправной точкой построения математического доказательства. В частности, из этого принципа непосредственно следует, что математическое утверждение не может быть одновременно истинным и ложным. Принцип исключенного третьего утверждает, что любое утверждение должно быть либо истинным, либо ложным.

Использование силлогизмов в сочетании с указанными двумя принципами в установлении истинности утверждения обычно называют *дедуктивным выводом* или *дедуктивным доказательством*.

Платоновский подход к доказательству состоит в допущении к рассмотрению противоположных утверждений, в выведении всех следствий из этого допущения и обсуждении этих следствий. По Платону, каждое понятие получает свое содержание через отношение к своей противоположности; тем самым строится система отношений, в рамках которой смысл имеют только те понятия, которые и должны быть определены. Поэтому в его системе не существует таких «начал», таких утверждений, которые были бы полностью непосредственными: каждое из «начал» оказывается опосредованным своей противоположностью, определенным «через другое». Таким образом, доказательство ведется «по кругу», и, как утверждает Платон, все получают свое доказательство, нет ни одного не доказанного (не опосредованного через систему) положения. В доказательстве Платона обычно используется метод, который сегодня называют доказательством от противного. Доказательство от противного также относится к дедуктивным доказательствам.

Аристотель, в противоположность Платону, утверждает, что не все в науке может быть доказуемым: должны быть первые исходные начала, которые не доказываются, а принимаются непосредственно.

«Мы же, напротив, утверждаем, что не всякая наука есть доказывающая наука, но знание непосредственных начал недоказуемо. И очевидно, что это необходимо так, ибо если необходимо знать предшествующее и то, из чего доказательство исходит, – останавливаются же когда-нибудь на чем-нибудь непосредственном, – то это последнее необходимо недоказуемо. Следовательно, мы говорим так: есть не только наука, но также и некоторое начало науки, посредством которого нам становятся известными термины».

Истинность аксиом, утверждает Аристотель во «Второй аналитике», познается с помощью безошибочной интуиции, что принципиально отличается от позиции его учителя Платона.

Аристотель, а вслед за ним и весь мир приняли за неоспоримую истину, что применение правил дедуктивного вывода к любым истинным посылкам гарантирует получение истинных утверждений. Несмотря на то, что существуют и другие методы рассуждений, например, рассуждения по индукции или по аналогии, все же греки отдавали предпочтение дедукции.

«Греки вообще придавали дедукции как источнику знания больше значения, чем современные философы. В этом Аристотель не так виноват, как Платон; он неоднократно признавал важность индукции и уделял значительное внимание вопросу о том, как мы устанавливаем исходные посылки, от которых должна отправляться дедукция. Тем не менее, он, как и другие греки, в своей теории познания отвел неподобающе высокое место дедукции. … Все важные выводы, вне логики и чистой математики, индуктивны, а не дедуктивны; единственными исключениями являются юриспруденция и теология, каждая из которых выводит свои исходные принципы из неподлежащего обсуждению текста, а именно, из свода законов или священного писания» (Б. Рассел, 53, с. 220).

Теорию непрерывности Аристотель был вынужден создать в связи с изучением понятия движения, которое является одним из самых фундаментальных понятий в его физике. Понятие непрерывности обсуждалось подробно философами элейской школы Парменидом и Зеноном, причем обсуждение парадоксов последнего привлекло внимание к этому понятию ряд выдающихся философов, в том числе Демокрита и Платона. В своих попытках найти решение зеноновских парадоксов Демокрит пришел к атомизму, а Платон – к обоснованию математики. Аристотель предложил третий путь, создав теорию континуума, которая послужила основой для его теории движения.

Аристотель отличает «непрерывность» как определенную форму связи от других форм связи: последовательности и смежности.

«Следующим по порядку называется предмет, находящийся за начальным или по природе, или отделенный от него другим способом, если между ним и тем, за чем он следует, не находится в промежутке предметов того же рода, например, линии или линий в случае линии, монады или монад в случае монады, дома в случае дома… Но ничто не препятствует находиться в промежутке чему-нибудь иному… "Смежное" есть то, что, следуя за другим, касается его. "Непрерывное" есть само по себе нечто смежное: я говорю о непрерывном, когда граница, по которой соприкасаются оба следующих друг за другом предмета, становится для обоих одной и той же и, как показывает название, не прерывается…»

Иными словами, следующее по порядку, смежное и непрерывное идут друг за другом по принципу возрастания связи между соответствующими предметами. Следование по порядку является необходимым, но не достаточным условием смежности, так же как и смежность – по отношению к непрерывности. При смежности предметы соприкасаются, но при этом каждый из предметов сохраняет свои края, так что две границы не сливаются в одну. В случае же, когда границы между соприкасающимися предметами сливаются в одну, т.е. появляется общая граница, а сами предметы становятся чем-то единым, то мы уже имеем дело с непрерывностью.

Непрерывное, по определению Аристотеля, – это то, что делится на части, всегда делимые. А это означает, что непрерывное исключает какие бы то ни было неделимые части, т.е. не может состоять из неделимых частей. «Невозможно ничему непрерывному состоять из неделимых частей, например, линии из точек, если линия непрерывна, а точка неделима». Таким образом, непрерывное есть то, что состоит из частей, которые в свою очередь состоят из частей, и т.д. Другими словами, непрерывное и любую его часть всегда можно разделить на более мелкие части. Этот подход к понятию непрерывности оказался полезным в построении и обосновании математического анализа, который формировался в XVII – XIX веках.

К понятию бесконечности, после парадоксов Зенона, греки, и в том числе Аристотель, относились с большой осторожностью, ибо «много невозможного следует и за отрицанием его существования, и за признанием». Однако Аристотель считал понятие бесконечности настолько важным для философии, что его счел необходимым проанализировать.

«А что бесконечное существует, уверенность в этом, скорее всего, возникает у исследователей из пяти оснований: из времени (ибо оно бесконечно), из разделения величин (ведь и математики пользуются бесконечным); далее, что только таким образом не иссякнут возникновение и уничтожение, если будет бесконечное, откуда берется возникающее. Далее, из того, что конечное всегда граничит с чем-нибудь, так что необходимо, чтобы не было никакого предела, раз необходимо, чтобы одно всегда граничило с другим. Но больше всего и главнее всего, что доставляет для всех затруднение на том основании, что мышление не останавливается: и число кажется бесконечным, и математические величины, и то, что лежит за небом: и если лежащее за небом бесконечно, то кажется бесконечным тело и существует множество миров…»

Одной из основных особенностей понятия бесконечности является то, что оно есть чисто интеллектуальное понятие, аналог которому нельзя найти в реальной действительности. Поэтому человеческое мышление, опирающееся на реальный опыт, легко, как показывают парадоксы Зенона, впадает в логические противоречия. Другими словами, при рассмотрении понятия бесконечности человеческому мышлению доверять нельзя. Путь рассуждения, который предлагает Аристотель при обсуждении этого понятия, заключается в рассмотрении каждой причины возникновения бесконечности и в анализе тех следствий, вытекающих из этих причин.

Аристотель выделял два типа бесконечностей: актуальная бесконечность и потенциальная бесконечность. На них можно также посмотреть как на два способа рассмотрения понятия бесконечности. Первый подход к понятию бесконечности, по словам Аристотеля, является характерным для пифагорейцев и Платона, которые рассматривали бесконечность как сущность, а не свойство. Такой подход вызывал критику Аристотеля:

«Если бесконечное – сущность и не относится к какому-нибудь подлежащему, то “быть бесконечным” и “бесконечность” – одно и то же, следовательно, оно неделимо, или делимо до бесконечности, а быть одному и тому же предмету многими бесконечными невозможно. Однако, если оно сущность и начало, то как часть воздуха остается воздухом, так и часть бесконечного – бесконечным. Следовательно, оно неразделимо и неделимо. Однако невозможно бесконечному существовать актуально, ведь ему необходимо быть количеством. Бесконечное, следовательно, существует по совпадению… Поэтому нелепости утверждают те, которые говорят так же, как пифагорейцы: они одновременно делают бесконечное сущностью и делят его на части».

Другой тип бесконечности, точнее, другой подход к этому понятию заключается в том, что бесконечность рассматривается не как сущность, а как некоторое «свойство» в потенции, в возможности, но не в действительности, осуществляемое, но не осуществленное, незавершенное и не могущее быть никогда завершенным. Как говорит Аристотель, бесконечное – это «не то, что вне чего ничего нет, а то, что вне чего всегда есть что-нибудь». Таким образом, основной тезис Аристотеля формулируется так: бесконечное существует потенциально, но не существует актуально. Иначе говоря, бесконечное не пребывает как нечто законченное, а всегда становится, возникает; оно не есть что-то действительное, а только возможное.

«Вообще говоря, бесконечное существует таким образом, что всегда берется иное и иное, и взятое всегда бывает конечным, но всегда разным и разным».

Отличие потенциально-бесконечного от актуально-бесконечного состоит в том, что первое, в сущности, имеет дело в основном только с конечным. В частности, когда мы встречаемся с потенциальной бесконечностью в процессе счета или в результате деления отрезка, мы каждый раз получаем или как угодно большую, или как угодно малую *конечную* величину.

При рассмотрении потенциальной бесконечности Аристотель различает два типа математических понятий: числа и геометрические фигуры, в частности, ограниченный с двух сторон отрезок (который Аристотель называл величиной). Эти два типа математических понятий соответствуют двум разновидностям потенциальной бесконечности. Так отрезок может бесконечно уменьшаться, но не может бесконечно возрастать, тогда как числа могут бесконечно возрастать, но их уменьшение всегда конечно и ограничивается единицей. Отрицание Аристотелем актуальной бесконечности не вступает в противоречие с математикой.

«Наше рассуждение, отрицающее актуальность бесконечного в отношении увеличения, как не проходимого до конца, не отнимает у математиков их теории: ведь они не нуждаются в таком бесконечном и не пользуются им: математикам надо только, чтобы ограниченная линия была такой величины, как им желательно, а в той же пропорции, в какой делится величайшая величина, можно разделить какую-либо другую».

Благодаря такому подходу к понятию бесконечности греческой математике удавалось избежать внутренних кризисов. Когда в XIX веке европейская математика стала использовать актуальную бесконечность, то уже в следующем веке это привело ее к глубоким кризисам в самих основаниях, от которых она не избавилась и до сих пор.

Мы закончим наше рассмотрение вклада Аристотеля в развитие математических наук определением места, которое занимает математика, по мнению Аристотеля, среди теоретических наук. Согласно Аристотелю, существует три области теоретического знания: математика, физика и философия. «При этом область теоретических наук выше всех других, а из этих наук — та, которая указана под конец: в ряду сущего она имеет наиболее ценный объект, а выше и ниже каждая наука ставится в зависимости от (ценности) того предмета, который ею познается».

Таким образом, рассмотрение аксиом является делом философа, «ибо аксиомы эти имеют силу для всего существующего, а не специально для одного какого-нибудь рода, отдельно от всех других. И пользуются ими все, потому что это — аксиомы, определяющие сущее, как таковое, а каждый род (изучаемых предметов) есть (некоторое) сущее». По отношению к аксиомам положение физика предпочтительнее, чем положение математика; хотя в целом рассмотрение аксиом — дело философа, но поскольку физик, в отличие от математика, имеет дело не просто с одним аспектом сущего, а с определенным родом его — именно с природным сущим, то он может исследовать и некоторые аксиомы.

Высшая из всех аксиом, исследуемых первой из наук — философией, является также первой и для каждой из наук, ибо она есть самое достоверное из всех начал. Такой аксиомой, о чем уже шла речь, Аристотель считает закон непротиворечия, который представляет собой высший закон мышления.

Как мы видим, для Аристотеля философия является высшим родом знания, следующим за философией родом знания стоит физика, а только затем — математика. Это связано с тем, что, по Аристотелю, математика не может служить теоретической основой для физики, в то время как физика может служить теоретической базой для математики, ибо физика может анализировать некоторые математические аксиомы. Аристотель создал физику как науку, отличную от математики, имеющую другой предмет и другие задачи, чем те, которые решает математика.

Резюмируя все сказанное в этом разделе, отметим, что Аристотеля можно с полным правом назвать *метаматематиком,* который внес решающий завершающий аккорд в построение фундамента греческой математики. Только после Аристотеля можно сказать, что математика превратилась в науку с «крепким» фундаментом, и уже не являлась просто собранием интеллектуальных достижений.

Начала Евклида являются, безусловно, одной из величайших книг, которые были когда-либо написаны, и одним из самых совершенных памятников древнегреческого интеллекта.

Б. Рассел

3.8. **Евклид**.

Евклид представляет собой пример человека, за которого говорят его книги, точнее, одна книга – «Начала», что пережила века, ибо о его человеческой жизни мало что известно. Можно высказать, утверждение (возможно, спорное), что современная математика обязана этой книге своей жизнью. Не будь этой книги – вряд ли математика возродилась бы в Европе в конце средних веков. Это связано с тем, что книга Евклида и по сей день является прекрасным учебником основ математики, в частности, геометрии, и по ней знакомились с математикой и учились столетиями миллионы людей. Есть в мире только небольшое число книг, которые по распространенности могут сравниться с «Началами». Эта книга дидактически написана так, что для ознакомления с основами геометрии можно обойтись и без учителя. Более того, по этой книге можно научиться греческому способу мышления, без чего нет и не может быть математики.

История европейской науки полна примеров, когда люди становились математиками после первоначального знакомства с этой книгой. Достаточно для иллюстрации назвать имя Ньютона, путь которого в качестве ученого начался со знакомства с «Началами».

«Начала» состоят из 13 частей, написанных Евклидом. Часто к этим тринадцати частям присоединяют четырнадцатую, написанную Гипсиклом, который в этом сочинении сравнивает поверхности и объемы додекаэдра и икосаэдра, вписанных в один и тот же шар. Книги I – IV охватывают геометрию и содержат результаты, полученные пифагорейцами. В книге V разрабатывается теория пропорций. В следующей VI книге Евклид связывает составление отрезков с операцией умножения отрезков. В книгах VII – IX содержится учение о числах, также восходящее к пифагорейцам. Книги X – XII посвящены теории площадей на плоскости и в пространстве, а также стереометрии, теории иррациональности (книга X). Исследования правильных тел излагаются в книге XIII.

Ценность «Начал» далеко выходит за пределы значения книги как учебника. Она, прежде всего, является первой энциклопедией математики, в которой собраны все основные достижения математики, созданные предшественниками Евклида. Более того, эта книга является не только собранием математических результатов. Ее структура дает четкое методологическое и логическое описание построения математики как науки, которое имеет такой законченный вид, что первое существенное изменение в нее было внесено, по существу, только через две с половиной тысячи лет, в XIX веке.

Написание «Начал» означало, по существу, завершение этапа возникновения и оформления математики как науки: был создан язык математики, выработаны основные правила проведения математических доказательств, т.е. создана логика математики. Другими словами, к III веку до н.э. было закончено построение греческой математики как науки, как интеллектуального познания. С этого времени и вплоть до XIX века в это стройное и красивое здание не было внесено ни одного принципиального изменения или новшества. И это произошло несмотря на то, что и после Евклида существовала плеяда прекрасных математиков, таких, как Архимед, Аполлоний, Диофант, Птолемей, которые внесли свой вклад в сокровищницу математики посредством своих математических исследований, вызывающих восхищение даже у современных математиков. Эти ученые обогатили математический язык и набор математических знаний, но не внесли ни одного методологического новшества. Если бы кто-то из греков решил позже Евклида создать энциклопедию математики, то он был вынужден был бы только добавить несколько новых страниц к «Началам», не изменив на прежних страницах этой книги ни слова.

Закончим наше рассмотрение роли Евклида и его «Начал» следующими словами М. Клайна:

«Толчком к созданию концепции логического, математического подхода к познанию природы послужили, по-видимому, «Начала» Евклида. Хотя сочинение Евклида предназначалось для изучения физического пространства, структура самого сочинения, его необычайное остроумие и ясность изложения стимулировали аксиоматически-дедуктивный подход не только к остальным областям математики, например, к теории чисел, но и ко всем естественным наукам. Через «Начала» Евклида понятие логической структуры всего физического знания, основанного на математике, стало достоянием интеллектуального мира» (М. Клайн, 34, с. 40).

Кто не знает, что всем частным наукам начала и зародыши сообщила философия, ибо равносторонние, овальные, круглые, многоугольные и другие фигуры — изобретения суть геометрии, но точку, поверхность, линию, твердое тело не изобрела геометрия. Как же она определила бы, что точка есть то, что не имеет частей, линия — длина без ширины и т.п. Это все относится к философии, и давать определения - задача философии.

Филон Александрийский

3.9. Математические объекты в греческой математике.

Греческая математика имеет дело с тремя типами объектов: это математические геометрические объекты, натуральные числа и уравнения. Все три типа объектов являются чистыми абстракциями. Первые два типа рассматриваются у Евклида, с третьим можно познакомиться у Диофанта, который был последним великим математиком античности, в его «Арифметике». Не лишним будет напомнить, что «Арифметика» Диофанта появилась почти через пять столетий после Евклида.

Обратим наше внимание прежде всего на геометрические объекты. Сразу отметим, что отношение греков к геометрическим объектам вполне согласуется с современным пониманием, ибо практически все школьные учебники геометрии в наше время составлены под сильным влиянием Евклида. В качестве иллюстрации греческого отношения к математическим объектам приведем слова Платона, который в «Государстве» говорит о геометрах следующее:

«Разве ты не знаешь, что хотя они используют видимые формы и рассуждают о них, мыслят они не о самих формах, а об идеалах, с которыми не имеют сходства; не о фигурах, которые они чертят, а об абсолютном квадрате и абсолютном диаметре… и что в действительности геометры стремятся постичь то, что открыто лишь мысленному взору?»

Математические геометрические объекты принципиально отличаются от прематематических геометрических объектов. *Во-первых*, математические геометрические объекты являются абстракциями, продуктами человеческого интеллекта, а прематематические геометрические объекты – реальными объектами, имеющими определенную геометрическую форму.

«Геометрия имеет дело с точными окружностями, но ни один чувственный объект не является точно круглым; и как бы мы тщательно не применяли наш циркуль, окружности будут до некоторой степени несовершенными и неправильными. Это наталкивает на предположение, что всякое точное размышление имеет дело с идеалом, противостоящим чувственным объектам» (Б. Рассел, 53, с. 56).

Во-вторых, целью исследования греческой геометрии является установление связи между различными элементами и свойствами математических объектов, в то время как в прематематической геометрии целью решения задач является вычисление конкретных числовых значений. Другими словами, в греческой геометрии *доказываются* утверждения, а в прематематической геометрии *вычисляются* конкретные значения.

В-третьих, утверждения в греческой геометрии в определенном смысле носят абсолютный характер. Например, большинство утверждений Евклида и сегодня рассматриваются как истинные. Методики решения практических задач в прематематике носят относительный характер. Они могут меняться как в зависимости от места, так и от времени, и носят характер соглашения в определенной группе людей.

Из приведенных различий непосредственно видно, что греческая геометрия не могла возникнуть из прематематики. В дополнение к сказанному можно добавить еще два косвенных довода. Один довод заключается в следующем: несмотря на то, что похожие прематематические геометрические задачи неоднократно решались в различных других человеческих цивилизациях, ни одна из них не создала ничего подобного греческой геометрии. Сказанное относится, например, и к индусам, и к китайцам. Второй довод состоит в том, что в сохранившихся письменных документах существующих или исчезнувших цивилизаций нельзя найти ничего, что можно было бы поместить между геометрией и прематематикой.

Отношение древних греков к понятию натурального числа принципиально отличается от современного понимания. Современная историческая литература по математике относится к понятию числа в античной науке с позиции теории числа, которая была построена в математическом анализе только во второй половине XIX века. С этой позиции натуральные числа, рациональные числа, иррациональные числа в греческой математике рассматриваются как объекты одной и той же природы (точки на вещественной прямой). Более того, часто происходит смешение прематематических чисел с математическими числами. Такое рассмотрение вряд ли можно считать обоснованным в историческом плане.

Попытаемся обосновать нашу точку зрения.

Во-первых, объекты, которые мы сегодня называем натуральными числами, у греков имели мистический характер, о чем мы уже писали выше. Для нас сегодня числа – это абстрактные объекты, а для греков это были мистические символы. Поэтому у ранних пифагорейцев число рассматривалось как собрание единиц, представляемое набором точек, камешков или других неделимых предметов.

«Единицы, составляющие число, считались неделимыми и изображались точками, которые пифагорейцы располагали в виде правильных геометрических тел, получая ряды “треугольных”, “квадратных”, “пятиугольных” и других “фигурных” чисел. Каждый такой ряд представляет последовательные суммы арифметической прогрессии с разностями 1,2,3 и т.д. … Пифагорейцы определили также “кубические” и “пирамидальные» числа”» (История математики, 32, т.1, с. 68).

Такой же подход к понятию числа можно найти и у Евклида в VII – VIII книгах (Евклид, 29). Это означает, что греки разделяли между собой два различных объекта, которые сегодня в современном смысле содержатся в понятии числа. Первый объект – это число, понимаемое как собрание единиц. Второй объект возникает при количественном сравнении двух объектов. Например, одна струна вдвое длиннее другой струны. Возникающее при сравнении нечто, которое мы обозначаем через 2, имеет другую суть, нежели натуральное число 2. *Греки второй объект не считали числом*.

Пифагорейцы не видели в единице натурального числа и считали, что «она является только зародышем, эмбрионом числа, ибо она лишена свойства множественности». И для Евклида единица не была числом. «Число – множество, состоящее из единиц. Единица же – это то, вследствие чего существующее является единым», – писал он. Греки рассматривали понятие единицы как первичное, неопределяемое понятие.

Во-вторых, в силу сказанного о единице, греки не имели никакого представления о рациональных числах, которое сложилось только в то время, когда греческая цивилизация исчезла с лица Земли. Здесь необходимо уточнить, что мы понимаем под рациональным числом, ибо в это понятие часто вкладывается разное содержание. Для того, чтобы разделить различное понимание, мы будем по необходимости вводить дополнительные слова. В частности, под *натуральными рациональными числами* (*натуральными дробями*) мы будем понимать отношение двух *натуральных* чисел. Так как греки не считали единицу натуральным числом, то у них не существовали натуральные рациональные числа.

Греческая теория чисел, по существу, представляла собой теорию полной делимости одного натурального числа на другое. В «Началах» Евклида нельзя встретить ни одного натуральной дроби.

Бытующее в литературе описание достижений греков в области рациональных чисел (см., например, История математики, 32, т.1) является просто современным изложением теории чисел, которое, можно сказать, навеяно греческой теорией о пропорциях или отношениях, созданной Евдоксом и дошедшей к нам благодаря «Началам» Евклида. Этот раздел геометрии, о чем мы уже писали выше, обычно называют *геометрической алгеброй*.

Теория Евдокса изложена в книге V «Начал». Изложение материала ведется на языке отрезков и отношений между ними, что не имеет ничего общего с теории чисел. Для этого достаточно сравнить между собой V и VII книги Евклида: в книге V, посвященной отношениям и пропорциям, Евклид говорит о величинах (имея в виду отрезки), а в книге VII, посвященной числам, он говорит о натуральных числах. Греки принципиально не могли увязать отношения отрезков с числами, ибо не имели представления об использовании масштаба (единицы измерения). В этом случае можно говорить об отношениях отрезков как о *геометрических рациональных* или *нерациональных числах*.

Важно также отметить, что основные понятия теории чисел, такие, как делитель, простое число, совершенной число и т.п., нельзя встретить в геометрической алгебре, ибо их нельзя изложить на геометрическом языке.

Греки, кроме теории чисел и геометрии, начали развивать и теорию уравнений, основные достижения в которой, согласно сохранившимся источникам, принадлежат Герону и Диофанту. Теория уравнений греков и составила основание для развития в дальнейшем алгебры.

«Появление Диофанта составляет до сих пор одну из самых темных загадок истории науки. Труды Диофанта представляют полную неожиданность и по постановке задач, и по методам их решения, и по алгебраической трактовке величин и действий над ними» (История математики, 32, т.1, с. 144).

Основным трудом Диофанта, дошедшим до нас, является «Арифметика», состоящая из 189 задач с решениями.

«”Арифметику” нельзя считать теоретическим трудом по арифметике в пифагорейском смысле слова – пифагорейцы термин “арифметика” предназначали для теории чисел, которая считалась дисциплиной без определенного метода, но требующая от ума некоего рода божественной интуиции. А этот трактат ближе всего к традициям вычислительной математики, или логистики. Однако в период, когда Диофант работал над составлением своей книги, это первоначальное различие уже, по-видимому, стерлось – это видно и из самого выбора названия, и из того, что практические задачи у Диофанта всегда сначала формулируются в абстрактной форме, а числовые данные вводятся позже» (А. Даан-Дальмедико, Ж. Пейффер, 23, с. 105).

С частью этой цитаты трудно согласиться: труд Диофанта ни в коем случае не относится к логистике, ибо здесь трудно найти формулировку практической задачи. В этой книге все задачи касаются только чисел и прямоугольных треугольников, т.е. даны в совершенно абстрактной форме. В этом смысле задачи Диофанта принципиально отличаются от задач, которые можно встретить у вавилонян.

Диофант оперирует числами, которые отличаются по своей природе как от прематематических чисел, так и от натуральных чисел. Он, по существу, вводит в обращение новый тип чисел, который мы назовем *алгебраическими рациональными числами.* Алгебраические рациональные числа отличаются от прематематических рациональных чисел отсутствием наименований. От натуральных чисел эти числа отличаются, во-первых, природой своего возникновения: натуральные числа возникли как мистические символы, в то время как алгебраические числа возникли как объекты, отвечающие коэффициентам и корням алгебраических уравнений. Во-вторых, в множестве алгебраических рациональных чисел мы находим в качестве числа единицу, в то время как среди натуральных чисел нет единицы. В-третьих, среди алгебраических чисел мы встречаем дроби и нечто, подобное отрицательным числам, которые рассматривались как недостача, чего нельзя встретить среди натуральных чисел.

В своей книге Диофант систематически использовал некоторые сокращения для степеней чисел, для неизвестных, а также для операций. Он проводил над своими символами все алгебраические операции, которые мы проводим теперь (возведение в степень, приведение подобных, подстановки и т.п.). Отличие от европейской алгебры XVI – XVII вв. состояло в том, что у Диофанта не было обозначений для параметров. Им приходилось придавать всякий раз конкретное числовое значение. Таким образом, в «Арифметике» впервые была введена буквенная символика. Более того, в «Арифметике» мы впервые находим запись уравнений (с числовыми коэффициентами).

Отождествление натуральных чисел с целыми положительными алгебраическими числами произошло потому, что для записи чисел из разных типов использовались буквы греческого алфавита. Благодаря записи, говоря математическим языком, был установлен изоморфизм между натуральными числами и целыми положительными алгебраическими числами без единицы.

Таким образом, греки оставили нам типы объектов, которые получили название «числа»: праматематические числа, натуральные числа и алгебраические числа. Единственная связью, существующей между этими объектами, является использование в имени объектов слова «число».

Неявное подтверждение последнему утверждению можно найти у М. Клайна:

«Работы Герона и Диофанта, Архимеда и Птолемея по различным вопросам арифметики и алгебры не отличались по своему стилю от "рецептурных" текстов египтян и вавилонян, содержащих четкие указания относительно того, что и в какой последовательности делать. Дедуктивные, проводимые "по всей форме" доказательства геометрии были преданы забвению. Все проблемы рассматривались индуктивно: автор указывал способ решения конкретной задачи, предположительно пригодный для решения более широкого круга задач, границы которого были нечетки. Нужно ли говорить, что при этом различные типы чисел (целые числа, дроби, иррациональные числа) вообще не определялись, если не считать маловразумительного определения целых чисел, предложенного Евклидом. Не существовало и аксиоматической основы, на которой можно было бы построить дедуктивную систему, пригодную для решения арифметических и алгебраических проблем» (М. Клайн, 34, с. 129).

3.10. Праматематика и полуматематика в Древней Греции и в Римской империи.

Рассматриваемый период в той части Земли, в которой располагались упомянутые выше страны, характеризуется бурным развитием экономической жизни, сопровождающейся развитием строительства, мореплавания, торговли и ремесел. Эти отрасли хозяйства обеспечили существование и дальнейшее развитие человеческой цивилизации.

В процессе развития различных отраслей хозяйства непрерывно возникает потребность в решении количественных задач, методы решения которых и составляют то, что мы назвали праматематикой. Возникновение праматематики в одном районе Земли обычно происходило вне связи с ее развитием в других районах. Поэтому можно утверждать, что возникновение и развитие праматематики в древней Греции происходило вне связи с развитием вавилонской и египетской праматематик.

По мере развития человеческого общества появляются и новые типы количественных задач, которые люди вынуждены решать, ибо этого требует само течение жизни. Решение этих задач часто связано не только с жизненным опытом, но и с определенным *общественным согласием*. Отсюда следует, что методы решения определенных количественных задач имеют только *местное* значение. Это означает, что методика и результаты решения одной и той же задачи могли меняться в зависимости от времени и места. Так как нет никакого «объективного» критерия для оценки «правильности» решения конкретной задачи, то решением объявлялось то, на что имелось общественное согласие. Поэтому основными критериями решения конкретной практической количественной задачи являлся опыт и общественное согласие.

Как мы уже отмечали выше, та область знаний, которая занималась решением прематематических задач, в древней Греции называлась «logistica». Ее использовали либо ремесленники, либо метеки (свободные люди, не имеющие гражданских прав), либо рабы. Образованные свободные граждане обычно не занимались прематематикой, ибо они редко участвовали в хозяйственной деятельности. Практически не было возможности обмена знаниями между этими слоями населения, т.е. занимающиеся практической деятельностью не имели никакого представления о математике, ибо она относилась к области интеллектуальных искусств, которыми занимались только свободные граждане.

В литературе по истории математики часто ссылаются на то, что многие греческие математики, такие, как Архимед, Герон, решали различные практические задачи. Однако найденные *математиками* решения упомянутых практических задач не оказывали никакого влияния на развитие *прематематики,* ибо не существовало никаких способов обмена информации. Резюмируя вышесказанное, можно заключить, что прематематика и математика в рассматриваемый период времени не имели никаких точек соприкосновения.

Как мы уже говорили выше, прематематика оперировала при решении практических задач только именованными числами, даже если это ясно не указывалось. В исторической математической литературе обычно утверждается, что греки имели специальные обозначения для некоторых классов дробей. У греков дроби, по своей сути, были прематематическими числами и отражали части некой совокупности, которая не была единицей в греческом понимании.

Возникновение и развитие греческой математики вызвало к жизни новое познание, которое можно поместить где-то между математикой и прематематикой. Условно мы назовем его *полуматематикой*. Это познание является одним из видов интеллектуального познания, ибо оно изучает те абстрактные объекты, которых называют математическими объектами и которые не имеют никакого практического значения. К таким объектам, например, относятся теория чисел и теория решения различных уравнений, т.е. то, что обычно называют *греческой арифметикой* и *греческой алгеброй*. Однако эти области нельзя отнести к математике, потому что в их рамках нельзя провести ни одно математическое доказательство, которое было бы основано на дедукции и использовало определенную систему аксиом. Другими словами, ни в арифметике, ни в алгебре у древних греков нет ни одного математически доказанного утверждения. Все имеющиеся в них утверждения получены в результате опыта или рассуждений с помощью обыкновенной индукции. Для удобства проведения рассуждений греки ввели свойства операций над натуральными числами на основании аналогии с прематематическими числами, с которыми они были знакомы по повседневной жизни. Мы назвали это познание *полуматематикой*, ибо оно гораздо позже вошло как часть в европейскую математику, когда была выработана система аксиом в теории чисел.

Математика же была связана с более утонченным типом заблуждений. Математическое знание казалось определенным и точным – таким знанием, которое можно применить к реальному миру; более того, казалось, что это знание получали, исходя из чистого мышления, не прибегая к наблюдению. Поэтому стали думать, что оно может дать нам идеал знания, по сравнению с которым будничное эмпирическое знание несостоятельно. На основе математики было сделано предположение, что мысль выше чувства, интуиция выше наблюдения. Если же чувственный мир не укладывается в математические рамки, тем хуже для этого чувственного мира. И вот всевозможными способами начали отыскивать методы исследования, близкие к математическому идеалу. Полученные в результате этого концепции стали источником многих ошибочных взглядов в метафизике и теории познания. Эта форма философии начинается с Пифагора».

Б. Рассел

3.11. Подведем итоги.

Подводя итоги, мы вынуждены ответить на ряд вопросов.

Первый вопрос, который встает перед нами, состоит в следующем: *какие причины вызвали появление на свет математики?* Или, другими словами*, почему возникла математика?* Из того, что было изложено в этой главе, вряд ли можно найти «рациональный» ответ, который мог бы удовлетворить современного человека, учитывая его *сегодняшнее* отношение к математике, сформулированное господствующим мнением в современном обществе и литературе. Из приведенного анализа напрашивается вывод, что для возникновения математики не было никаких видимых причин: ни в практической, ни в интеллектуальной жизни. В подтверждение этого тезиса мы можем еще раз повторить несколько косвенных доводов, которые были приведены выше.

Во-первых, ярким свидетельством этому является то, что вся известная история человечества не может привести другого примера возникновения чего-либо, подобного математике. Этот довод выглядит достаточно странным, однако, если математика являлась тем необходимым элемент для существования и развития человеческой цивилизации, то и другие народы стали бы искать и, в конечном счете, находить нечто, подобное греческой математике. Это утверждение подтверждается содержанием праматематики, аналогичные задачи из которой встречаются у разных народов в разных цивилизациях.

Во-вторых, во всей литературе по истории математики до сих пор не дается никакого логического обоснования появлению математики. Более того, в этой литературе не приводится ничего такого, существовавшего до математики, что можно рассматривать как предшествующее математике. Часто в литературе можно встретить утверждение, что корни греческой математики лежат в праматематике других цивилизаций, таких, как египетская или вавилонская, т.е. математика появляется в процессе абстрагирования понятий и задач из праматематик этих цивилизаций. Единственным доводом в пользу этого утверждения является то, что в праматематике решаются практические количественные задачи, которые современные авторы могут представить в абстрактном виде.

В-третьих, в момент создания математики существовала в греческой цивилизации, как мы уже неоднократно говорили выше, праматематика, которая называлась логистикой. Между математикой и логистикой не существовало никакой связи, о чем свидетельствуют дошедшие до нас письменные источники. Объяснение этому необходимо искать не только в различии целей развития каждого из этих областей знаний, но также из сословного различия тех, кто занимался ими. Философии, математике и искусству в древней Греции посвящали свое время прежде всего состоятельные люди, а не те, кто занимался ремеслами. Все домашнее или общественное хозяйство держалась на рабах, метеках и на свободных гражданах – ремесленниках. Образованные свободные граждане обычно не занимались никакой практической полезной деятельностью: трудом, торговлей и т.п. Платон провозгласил, что профессия лавочника недостойна свободнорожденного, и предложил подвергнуть наказанию всякого гражданина, который унизит себя подобным занятием, как совершившего преступление. Аристотель утверждал, что в идеальном государстве ни один гражданин не должен заниматься никаким ремеслом. В таком обществе эксперимент, наблюдение и решение практической задачи были чужды мыслителям и участникам различных школ. Считалось, что занятия такого рода не могут привести к результатам научного, в частности, математического характера. То есть наука здесь рассматривалась как интеллектуальное занятие, являющееся уделом свободных граждан.

В-четвертых, прематематика является одним из видов прагматического познания, в то время как математика принадлежит интеллектуальному познанию. До сих пор в истории человечества не удалось найти ни одного примера, когда некий вид прагматического познания породил вид интеллектуального познания.

Второй вопрос можно сформулировать следующим образом: *какими свойствами обладает математика, которые отличают ее от других областей знаний, в частности, от прематематики?*

Для ответа на этот вопрос необходимо определить, что мы понимаем под математикой. Под математикой мы понимаем интеллектуальное познание. Как познание, математика характеризуется объектами исследования, которые присущи этому познанию, пониманием того, что значит истинное утверждение в этом познании, методом получения истинных утверждений в рамках этого познания, а также набором истинных утверждений или знаний. Объектами этого познания являются геометрические фигуры и тела, а также целые положительные числа. Истинными утверждениями в математике считаются базисные утверждения или аксиомы, а также все утверждения (теоремы), полученные специальным способом из аксиом. Аксиомы считаются самоочевидными утверждениями. Способ получения истинных утверждений из аксиом называется *дедукцией*. Греки считали, что с помощью дедуктивных рассуждений из аксиом получаются истинные утверждения. Сам путь получения истинных утверждений с помощью дедуктивных рассуждений называется дедуктивным выводом или доказательством. Знаниями в математике считаются только истинные утверждения, т.е. аксиомы и теоремы.

Математикой греки считали только геометрию. Греческая теория чисел была, по существу, собранием отдельных задач, интеллектуальных головоломок, решение которых осуществлялось по определенным формализованным правилам. Греческая арифметика напоминала собой теорию чисел и была собранием решений конкретных задач, некоторые из которых были абстракцией прематематических задач.

Уже из приведенного содержания понятия математики следует ее принципиальное отличие от прематематики. Еще раз перечислим некоторые из этих отличий. Если основной целью математики является получение истинных утверждений, то основной целью прематематики является проведение вычислений. Если в математике объектами исследования являются абстрактные объекты, то прематематика имеет дело или с количественной сущностью реальных объектов, или с геометрической формой этих объектов. Если в математике знаниями являются утверждения, то в прематематике – методики (инструкции) решения однотипных задач. Если в математике знания носят абсолютный характер, ибо они основаны на самоочевидных истинах, то в прематематике знания носят относительный характер, ибо они получены на основе опыта и неформальных соображений, и являются соглашениями между людьми.

В заключение ответа на поставленный вопрос отметим, что самым важным отличием математики от других видов познаний является способ получения истинных утверждений, который был основан на логике Аристотеля и назывался дедукцией. Дедукция являлась совершенно новым способом мышления, который изобрели греки. До сих пор неизвестен ни один народ, ни одна цивилизация, которая изобрела бы интеллектуальный продукт, подобный дедукции. Только дедукция и основанное на ней математическое доказательство и были тем фундаментом, который помог сохранить математику и науку после уничтожения греческой цивилизации. Термин «доказательство» являлся и является символом научности.

Третий вопрос: *создали ли греки еще что-либо, напоминающее математику?*

Греки, следуя Пифагору, выделяли четыре математические дисциплины: арифметику или теорию чисел, геометрию, гармонию или теорию музыки, астрономию (астрологию).

Об арифметике и геометрии мы уже много говорили выше. Греческая теория музыки являлась математической теорией музыки, истоки которой восходят к Пифагору. Эта теория основана на изучении числовых отношений, первые из которых, связанные с октавой, квинтой и квартой, были найдены, согласно традиции, Пифагором, и исходили из его мистического учения. На этих соотношениях строилась теория гармонии. Музыка и числа были у пифагорейцев тесно связаны.

Свидетельством этого является их отношение к правильной треугольной пирамиде – тетракису. Тетракис связан с четверкой чисел 1, 2, 3, 4, соотношения между которыми определяют основные музыкальные интервалы. Выше мы уже приводили слова пифагорейской клятвы, в которой упоминается тетракис. Аристотель приводит и другое изречение пифагорейцев, связывающее тетракис с музыкой, гармонией: «Что такое дельфийский оракул? Тетракис! Ведь он – гамма, по которой поют сирены».

В дальнейшем развитии теории музыки были найдены более сложные отношения, а вся она была чисто математической аксиоматической теорией. В построении этой теории, которое продолжалось несколько веков, принимали участие многие греческие математики, среди которых можно отметить Гиппаса, Архита, Евдокса, Эратосфена и Птолемея. Последний, по существу, и завершил развитие греческой теории музыки. После греков мы уже не встретим ученых среди других народов, занимающихся теорией музыки.

Греки, следуя традиции более древних восточных цивилизаций, значительное внимание уделяли не астрономии, а астрологии.

«”Астрология, – говорит профессор Гилберт Марей, – охватила эллинистический ум, словно некая новая болезнь, охватывающая народ какого-нибудь отдаленного острова. Могила Озимандия, как ее описывает Диодор, была покрыта астрологическими символами, могила Антиоха I, которая была открыта в Каммагене, – такова же. Для царей было естественно верить, что звезды покровительствуют им. Но каждый был готов воспринимать заразу”. Кажется, впервые научил греков астрологии во времена Александра халдей по имени Берос...» (Б. Рассел, 53, с. 246).

«…большинство даже лучших философов стали верить в астрологию. Это повлекло за собою – поскольку астрология считала, что будущее можно предсказать, – верование в необходимость или в судьбу, которое можно было противопоставить широко распространенной вере в фортуну. Несомненно, что большинство людей верило в то и в другое, совершенно не замечая их несовместимости» (Б. Рассел, 53, с. 247).

Сделаем несколько замечаний к этим двум цитатам. Во-первых, с хронологией Рассела по отношению времени первого знакомства греков с астрологией трудно согласиться. Думается, что это знакомство состоялось гораздо раньше. Согласно греческим источникам, и Фалес, и особенно Пифагор были знакомы с египетской астрологией, а возможно, и с вавилонской. Более того, как мы уже упоминали выше, астрология являлась частью пифагорейского учения. Во-вторых, астрологию того времени можно рассматривать как некое мистическое, чисто интеллектуальное познание, в котором для придания ему достоверности или «истинности» иных его утверждений использовали наблюдения за движением небесных объектов. Термин «астрономия» можно в те времена отнести к тем немногочисленным практическим приложениям наблюдений за ночным небом и к тому небольшому количеству прагматических регулярностей, которые удалось установить на базе наблюдений. Установленные регулярности являлись важным инструментом в астрологии. В свете нашего подхода можно сказать, что астрономия в то время являлась частью пренауки.

Основным достижением греков в области астрологии-астрономии было создание геометрической геоцентрической системы Гиппарха – Птолемея.

Для дальнейшего обсуждения необходимо выделить две системы Гиппарха – Птолемея: одна – теоретическая система, а другая – практическая система для проведения расчетов. Теоретическая система представляет собой геометрическую модель, где каждая планета движется по своей круговой орбите, центр которой в свою очередь вращается вокруг Земли. Центр круговой орбиты вращения планеты может совпадать с Солнцем или быть просто математической точкой.

Практическая система для расчета движений планет, Луны и Солнца была построена на основе теоретической модели с учетом большого количества накопленных наблюдений за небом. Для этого Птолемей несколько видоизменил теоретическую модель. С помощью этой практической модели Птолемею и Гиппарху удалось получить описание движения небесных тел, хорошо согласующееся с имеющимися результатами астрономических наблюдений того времени. Более того, со времени Гиппарха лунное затмение можно было предсказать с точностью от одного до двух часов, хотя солнечные затмения удавалось предсказать менее точно. Такие предсказания стали возможными, потому что Птолемей применил специальные методы вычислений, которые сегодня называются тригонометрическими, разработанные им, по его собственному призванию, для астрономии. Он широко пользовался математическими достижениями Гиппарха, на которого он часто ссылается, поэтому трудно точно оценить степень оригинальности вычислительного метода Птолемея.

Хотя открытие тригонометрии часто приписывают Птолемею, однако современная тригонометрия мало напоминает тригонометрию Птолемея. Он использовал аналоги понятий синуса, косинуса и тангенса, которые определялись на языке хорд окружностей. Все сказанное ни в коей мере не умаляет роли Птолемея, основной труд которого «Альмагест», наряду с «Началами» Евклида, пользовался безусловным авторитетом в течение почти полторы тысячи лет.

Птолемей отчетливо сознавал, что его теория представляет собой не более чем *удобное* математическое описание, согласующееся с наблюдениями, и не обязательно должна отражать истинный механизм движения планет. Однако весь христианский (и не только христианский) мир в течение более тысячи лет рассматривал его теорию как абсолютную истину, объясняющую строение Вселенной.

Резюмируя, можно сказать, что теоретическая модель относится к математике, в то время как практическая модель принадлежит, по своей сути, прематематике.

Наконец, еще одной математической дисциплиной являлась так называемая «оптика», которая занималась изучением отражения лучей света от различных поверхностей, имеющих известную геометрическую форму. Здесь мы встречаемся с работами таких математиков, как Евклид, Герон, Архимед, Аполлоний.

Четвертый вопрос: *а могла ли греческая математика того времени принести какую-нибудь пользу в решении практических задач?* Этот вопрос можно переформулировать следующим образом: позволяла ли греческая математика того времени построить математическую модель, которую можно было бы использовать при решении практических задач? На оба эти вопроса имеется только отрицательный ответ. Для обоснования этого ответа приведем чисто математические причины, не касаясь философских и других причин, о которых мы только что говорили.

Первая причина заключается в том, что язык греческой математики не давал возможности построения удобных для практических нужд математических моделей. Язык тогдашней математики был в основном геометрическим, который удобен для объяснения и наглядности, но совершенно не предназначен для вычислений. Этот язык в определенной мере можно применять в астрономии (и то с большим трудом), но не более того. Именно поэтому единственной математической моделью, которая осталась после греческой цивилизации и могла служить в той или иной степени практическим целям, была геометрическая модель Птолемея – Гиппарха, о которой мы уже говорили выше. Иначе говоря, чтобы построить математические модели для решения практических задач, нужен принципиально другой язык, нежели геометрический.

Вторая причина состоит в том, что математический язык греков был очень беден математическими понятиями: все они сводились или к числу, или к геометрической фигуре. В частности, в этом языке отсутствовало такое понятие, как «математическая зависимость» или подобное ему, без которого нельзя методологически сформулировать задачу так, чтобы ответом на нее была математическая модель.

Третья причина заключается в том, что греки не обладали удобной системой записи конкретных числовых значений, что в крайней степени затрудняло проведение мало-мальски сложных вычислений.

Пятый вопрос. Теперь попытаемся в целом оценить греческую математику как собственно науку. Сама греческая математика, как мы уже говорили, являлась геометрией. Как также говорилось выше, созданная греками геометрия представляла собой совершенную математическую теорию, в которой математики последующих столетий, если и находили ошибки и неточности, то быстро их устраняли и исправляли. Греческая геометрия являла собой произведение высочайшего уровня интеллектуального искусства, которому подражали все дальнейшие поколения математиков.

В связи с греческой геометрией необходимо сделать следующее замечание. Обычно ее рассматривают как аксиоматическую дедуктивную систему. Однако в ней при доказательствах геометрических теорем используются специальные характерные для нее приемы: движение, вращение, перенос. Здесь есть два момента. Первый момент связан с отношением греческой философии к понятию движения, которое являлось одним из фундаментальных ее основ. Второй момент связан с тем, что математика и философия рождались одновременно, и поэтому было естественным определенное их переплетение. Здесь же мы видим пример использования философских понятий в математике.

Движение, вращение и перенос геометрических фигур и тел обладали некоторыми свойствами, которые накладывали определенные требования на само геометрическое пространство. Эти понятия, их свойства, а также свойства геометрического пространства нельзя определить чисто абстрактно в рамках геометрии, ибо они связаны с первичными философскими понятиями, т.е. относятся к *метаматематическим* понятиям. Другими словами, они не могут вытекать из какой-либо системы аксиом геометрии. Любое включение этих понятий формальным путем в геометрию выводит за рамки геометрии Евклида.

Интенсивное применение переноса и вращения элементов геометрических фигур привело к тому, что в процессе окончательного оформления геометрии как науки во времена Платона было разрешено пользоваться циркулем и линейкой. Использование циркуля и линейки в процессе проведения математических рассуждений сделало рассуждения более наглядными и легко воспринимаемыми. Важно отметить, что без использования этих понятий в доказательствах значительная часть геометрических утверждений оказалась бы за пределами геометрии, а оставшаяся часть геометрии представляла бы собой набор достаточно тривиальных утверждений.

Полуматематика родилась одновременно с математикой, и с этого момента полуматематика и математика развивались параллельно. Грекам не удалось, несмотря на все их попытки, что видно из соответствующих книг «Начал» Евклида, а также из других дошедших до нас книг, найти конечную систему аксиом, необходимую для построения греческой полуматематики в виде аксиоматической дедуктивной системы.

Связь между математикой и полуматематикой осуществлялась через так называемую геометрическую алгебру. Более того, практически все доказательства утверждений, как мы уже говорили выше, в арифметике и в алгебре греки проводили с использованием геометрии. Для этого каждому математическому утверждению ставилось в соответствие аналогичное утверждение на языке геометрии, которое затем и доказывалось геометрическими методами. В частности, геометрическими методами решались и уравнения различных типов.

Шестой вопрос: *почему на протяжении приблизительно тысячи лет, т.е. с момента возникновения греческой цивилизации и до гибели этой цивилизации, только греки занимались математикой?*

Ответ на этот вопрос можно найти в том, что математика стала частью греческой культуры, одним из видов греческого искусства, точнее, одним из типов интеллектуального искусства, подобным литературе, театру, гимнастике, спорту и т.п. Поэтому к изучению математики греки относились так же, как к изучению одного из видов искусств. Когда у зажиточных слоев греческого населения были средства и настроение обучать своих детей искусствам, то они обучали детей также и математике. На творческих математиков в этом смысле можно смотреть как на деятелей искусств. Все доказанные ими математические решения представляли собой произведения интеллектуального искусства, наслаждение и удовольствие от которых могли получить только избранные, говорящие на одном и том же языке или понимающие этот язык.

Ответ на вторую часть этого вопроса – почему *только* греки занимались математикой, или, другими словами, *только* греки доказывали математические теоремы и писали математические книги – также, по-видимому, содержится в ответе на первую часть. Но тогда поставленный вопрос можно сформулировать по-другому, следующим образом: почему другие народы, даже знакомые с греческой культурой, не внесли в рассматриваемый период в математику ничего существенного?

В качестве ответа можно привести следующее соображение. Математика была частью чуждой культуры, причем, чтобы овладеть ею, необходимо было затратить значительные усилия. Математика представляла собой не только набор тех или иных фактов, но являла прежде всего образ мышления, овладеть которым можно было только через специальное воспитание и обучение.

Несмотря на то, что греческая культура с помощью походов Александра Македонского и захватов Римской империи распространилась на огромной территории, она осталась чуждой другим народам. Эти народы могли тем или иным способом освоить те виды греческой культуры, которые не требовали для их освоения значительных интеллектуальных усилий. К ним относятся язык, литература, гимнастика, театр и т.п. Но для освоения философии и математики, как мы уже говорили, требовались существенные интеллектуальные усилия и ресурсы, связанные с образованием и воспитанием, которые трудно найти у покоренных народов, что были воспитаны в других условиях и на иных принципах, нежели греки.

Приверженность древних греков математике, которая на начальном этапе возникновения была связана с мистикой и религиозными воззрениями, объясняется их отношением к искусству и к спорту, ибо чувство восхищения тем, что можно было увидеть или достигнуть, являлось движущей силой их национального характера.

К уже сказанному сделаем еще несколько дополнительных замечаний.

Во-первых, трудно заниматься, особенно математикой, в одиночестве, без интеллектуального общения и обсуждения. Формулирование математических задач, которые пытаются решать математики, связано с общественным интересом к ним в рамках определенной группы людей. Это означает, что любая активная математическая жизнь может протекать только в тех местах, где возможно такое общение, т.е. именно в таких местах, где могла существовать математическая община. Там создавался особый интеллектуальный климат, где математики выступали, образно выражаясь, как спортсмены, которые стремятся достичь желанной цели – решить первыми математическую задачу. В этой атмосфере занятия математикой становились занятиями интеллектуальным спортом.

Во-вторых, создание математических центров требует значительных интеллектуальных и материальных затрат. Если деятели традиционных искусств могли еще каким-то образом жить с помощью продажи своих произведений, то математики не могли добывать средства на свою жизнь подобным путем. Поэтому для того, чтобы жить, они должны или быть состоятельными людьми, или жить на субсидии, выдаваемые правителями определенных городов или государств. Таким образом, математика могла существовать длительное время только там, где были соответствующие материальные и интеллектуальные ресурсы, которые правители или состоятельные граждане могли выделить для этой цели.

В третьих, математика представляла собой искусственно созданное интеллектуальное познание, в котором принципиальным был способ проведения интеллектуальных рассуждений – математическое доказательство. Этот способ мышления, основанный на дедукции, был совершенно новым для человеческого мышления того времени, в основе которого лежала индукция, характерная для прагматического познания. Для завоевания своих позиций в греческом мире дедукции потребовалось достаточно много времени и специфические условия общественной жизни. Для других народов этот способ мысли был чужд. Поэтому, в силу указанной причины, в рассматриваемый период занятия математикой, а особенно геометрией, другим народам вряд ли были доступны.

Глава 4. Развитие математики на Востоке и в Западной Европе в V-XVII веках.

На протяжении всех столетий, пока арабы активно занимались математикой, в своих оригинальных работах они мужественно сопротивлялись соблазнам точного рассуждения.

М, Клайн

Мусульманская цивилизация в свои великие дни достигла замечательных результатов в области искусств и во многих областях техники, но обнаружила полную неспособность к самостоятельным умозрительным построениям в теоретических вопросах. Её значение, которое нельзя недооценивать, заключается в роли передатчика. Античную и новую европейскую цивилизацию разделяют века мрака. Мусульмане и византийцы, будучи лишены умственной энергии, необходимой для новаторства, сохранили аппарат цивилизации: образование, книги и ученый досуг. Мусульмане и византийцы стимулировали Запад, когда он вышел из состояния варварства: мусульмане преимущественно в XIII столетии, византийцы же большей частью в XIV столетии.

Б. Рассел

4.1. Индо-арабский период (VII-XIII в.н.э).

В III – IV веках н.э. греческая культура прекратила свое существование в Западной Европе из-за различных бедствий, обрушившихся на нее, включая нашествия варваров. По существу, была уничтожена вся культурная прослойка Римской империи в Западной Европе. Тяжелые потери греческая культура понесла и на Востоке. Были закрыты почти все центры греческой культуры в Византии, включая знаменитую Афинскую школу. Указ византийского императора Юстиниана от 529 г. о запрещении языческих школ заставил бежать греческих ученых из Афин в Персию и Индию. Нашествие арабов и сожжение Александрийской библиотеки положило конец Александрийской школе. Остались существовать отдельные центры греческой культуры в Сирии (например, академия в Евфрате) и на Востоке, в частности, в Индии.

Однако эти уцелевшие очаги греческого образования не способствовали дальнейшему культурному развитию. Основным их достижением было ознакомление местных, приходящих и проходящих народов с греческой культурой. Однако как самостоятельная *живая* культура она перестала существовать. Но, к счастью для всего человечества, сохранилась в книгах.

Греческая математика умерла еще раньше. Как образно выразился Ван дер Вар-ден (12), «пламя греческой математики погасло, как догоревшая свеча». Однако математика оставила глубокий след в сознании тех народов, у которых сохранились следы греческой культуры. Эти народы получили в наследство также целую библиотеку книг, в которых были изложены все достижения греческой математики, и в том числе изумительный учебник математики.

Ближний Восток и Индия познакомились с греческой культурой благодаря походам Александра Македонского, который создавал в каждом завоеванном государстве очаги этой культуры. Государства, образовавшиеся после распада его империи, сохранили их, чем также способствовали ее распространению. Пришедшая затем Римская империя только усилила влияние греческой культуры в этих районах.

С упадком Римской империи центр математических исследований постепенно перемещался в Индию, а позже – в обратном направлении, в Месопотамию. В Индии образовались два основных центра математических исследований: в Майсоре (южная Индия) и в Удджайне (центральная Индия). Из этих школ вышел целый ряд известных математиков, таких, как Ариабхата, Брахамагупта и другие. Они оставили после себя книги, которые позже были переведены на европейские языки. Первые индийские книги, содержащие сведения по астрономии и математике, появились в V в. н.э. и известны под именем «сиддханты».

«Первые «сиддханты», появившиеся в V в. н.э., имеют явно эллинистическое происхождение. “Паулиса-сиддханта” приписывается некоему Паулисе из Саинтры. По-видимому, ее автором был александрийский астроном Паулос, бежавший в Индию после разгрома научного центра в Александрии. О греческом происхождении свидетельствует и название «Ромака-сиддханты»: жителей Восточной Римской империи часто назвали ромеями (впоследствии арабы называли их румами). В сиддхантах применяются некоторые греческие термины. … Важнейшая из сиддхант была написана Брахмагуптой около 628 г. Она называлась “Брахма-сихута-сиддханта” (“Усовершенствованное учение Брахмы”) и состояла из 20 книг, большая часть которых была отведена астрономии, но XII книга посвящена арифметике и геометрии, а XVIII – алгебре» (История математики, 31, т. 1, с. 180).

Как и в любой человеческой цивилизации, в Индии была развита своя прематематика, которая называлась ганитой (что означает искусство вычислений) и представляла собой набор местных методик решения практических количественных задач. В качестве одного из доказательств существования индийской прематематики задолго до греков можно привести книгу “Шулва сутра” (“Правила веревки”), относящуюся к VII-V вв.до н.э. В этой книге, в частности, даны методики проведения количественных расчетов, связанных с построением алтарей.

Было развито несколько местных систем десятичного представления прематематических количественных чисел. Одной из первых нумераций, применявшихся в Индии, были цифры “карошти”, которыми пользовались в северной Индии. Начиная с VI в. до н.э. в Индии были распространены цифры “брахми”. Важным отличием цифр “брахми” от “карошти” было наличие специальных знаков для чисел от 1 до 9 с помощью повторения знака для 1, применявшихся в Финикии, Вавилоне и Египте, и обозначение этих чисел специальными знаками. Эта особенность цифр брахми стала предпосылкой создания в Индии десятичной позиционной системы.

Из приведенной выше цитаты следует, что источником того, что сегодня называют индийской математикой, является синтез греческой математики и сплава индийской прематематики с греческой прематематикой. Известно, что в V в.н.э. в Индии уже существовала греческая переводная литература, в частности, греческая астрономическая литература.

Часто можно встретить утверждение, что индийцы с полным безразличием относились к математической строгости, а выдвигаемые ими тонкие идеи они с поразительным равнодушием смешивали с грубыми соображениями египтян и вавилонян. В подтверждение этого тезиса приводят следующие слова среднеазиатского ученого-энциклопедиста аль-Бируни:

«Я могу сравнить то, что содержится в их книгах по арифметике и другим математическим наукам, только с перламутром, смешанным с незрелыми финиками, или жемчужинами вперемешку с навозом, или с кристаллами, перемешанными с камешками. Обе части имеют равную ценность, поскольку у них нет примера восхождения к вершинам логического познания».

С этим высказыванием аль-Бируни трудно согласиться, ибо он смешивает воедино два предмета: греческую математику и индийскую прематематику. Из греческой математики индийцев меньше всего привлекала геометрия. Их вклад в нее невелик. Да он и не мог быть велик, ибо для внесения вклада в геометрию необходимо овладеть логикой математического доказательства, основанной на дедукции, что крайне трудно сделать в отсутствии соответствующего сообщества или обучения. Поэтому трудно искать у них «пример восхождения к вершинам логического познания».

Индийцы различали между собой арифметику и алгебру. Так, одним из санскритских названий алгебры было «авйакта ганита» – «искусство вычисления с неизвестными величинами», в то время как санскритским названием арифметики служило «вйакта ганита», т.е. «искусство вычисления с известными величинами». Индийский математик Брахмагупта в начальных строках своего известного трактата по алгебре так характеризует ее содержание:

«Так как проблемы едва ли смогут быть решены без знания алгебры, я изложу алгебру с примерами. Зная метод «распыления», с нулем, отрицательными и положительными количествами, неизвестными величинами, способы приведения к уравнению первой степени, уравнений с одним неизвестным и квадратных уравнений, можно стать знатоком среди обученных» (А.И. Володарский, 17, с. 45).

Все алгебраические исследования индийцев проводились в греческом духе: здесь не было ничего такого, что не смогли бы сделать греки. Они просто продолжали греческую традицию позднего александрийского периода. Основным достижением индийцев в алгебре можно считать использование определенной символики, что было существенным шагом вперед по отношению к греческой математике. Особенно интересна символика, связанная с представлением определенного вида радикалов, что позволило с помощью аналогии определить ряд действий над ними. Другим, не менее важным, является введение в рассмотрение нуля и отрицательных чисел, хотя эти достижения скорее относятся к индийской прематематике.

Самые значительные достижения индийцев, как мы уже говорили выше, лежат в прематематике. Прежде всего эти достижения связаны с тем, что индийцы предложили десятичную позиционную систему для записи чисел с помощью цифр. Эта система известна под именем «деванагари». Ее цифры, возникшие из цифр брахми, позже были переработаны в арабские цифры, а через них – и в европейские цифры. Сначала эта система содержала только девять цифр: 1, … 9.

«Первая известная нам запись с помощью цифр брахми, в которой применяются только первые девять цифр, а десятки и сотни обозначаются теми же цифрами, что и единицы, относится к VI в. н.э.: это дарственная запись от 595 г. н.э., в которой 346-й год записан цифрами брахми 346. Нуля не было, вместо него на счетной доске оставлялся пустой столбец» (История математики, 31, т. 1, с. 182).

Первое достоверное свидетельство о записи нуля относится к 876 г. н.э.: в настенной надписи из Гвалиора (Индия) имеется число 270. Так как это утверждение оспаривается рядом исследователей, то возможно, что нуль появился в более ранний период. Индийцы разработали правила арифметических действий, основанных на этой нумерации, тем самым заложив основы современной арифметики. Однако здесь важно отметить, что на правила арифметических действий необходимо смотреть только как на методику (инструкцию) выполнения действий. Эти методики являлись достаточно эффективными, что позволило резко улучшить качество вычислений и методы решения более сложных задач. К основным арифметическим действиям индийцы относили сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в квадрат и куб и извлечение квадратного и кубического корней.

Индийские математики, начиная с Брахмагупты (VII в. н.э.), систематически пользовались отрицательными числами и трактовали положительные числа как имущество, а отрицательные числа – как долг. Брахмагупта приводит все правила арифметических действий над отрицательными числами. Отрицательные числа у индийцев являлись прематематическими, так как они не применялись при решении систем линейных уравнений.

Позже отрицательные числа стали встречаться в решениях алгебраических уравнений, например, у индийского математика XII века Бхаскара II. В этом случае отрицательные числа стали полуматематическими объектами, и в этом качестве они уже относятся к полуматематике. Сразу же отметим, что здесь употребляется один и тот же термин «отрицательные числа» как наименование двух совершенно разных понятий (объектов), имеющих разное содержание и разную природу. Прематематическое понятие «отрицательное число» выражает степень обладания свойством неким реальным объектом. Полуматематический объект «отрицательное число» есть символ, обозначающий некий искусственный интеллектуальный объект, существующего *только* в сознании человека.

Одним из достижений индийской прематематики было усовершенствование, по всей вероятности, позднегреческой традиции в записи и использовании «дробей». Для них была изобретена специальная запись, которая очень напоминает современную. Отличие состояло только в отсутствии делительной черты. Друг от друга «дроби» отделялись вертикальными и горизонтальными линиями. Имелись правила работы с такого вида объектами.

Здесь необходимо подчеркнуть, что «дроби», с которыми работали индийцы, не являлись собственно дробями, т.е. не имели того содержания, которое современный человек привык вкладывать в это понятие. Это связано с тем, что и индийцы не включали 1 (единицу) в число натуральных чисел.

Как мы видим из сказанного выше, индийцы практически ничего не внесли в развитие собственно математики. Основным их достижением было то, что “разбудили” интерес к математике в Месопотамии среди арабов.

Математика начинает жить в Месопотамии только во времена ислама, начиная с VIII века, когда были образованы арабские халифаты, управляемые халифами, которые покровительствовали искусству и науке. Более того, при халифах Аббасидской династии, среди которых необходимо отметить ал-Мансура, Харуна-ал-Рашида и ал-Мамуна, начался подлинный расцвет греческой культуры. Так, в IX в. халиф ал-Мамун соорудил в Багдаде «Дом мудрости» с библиотекой и обсерваторией. Особое внимание все правители того времени обращали на развитие астрологии, которая была существенно развита у греков. Большую роль сыграл перевод «Большого собрания» Птолемея. Занятия астрологией вызвали интерес и к математике. Поэтому большинство тех, кто интересовались собственно математикой (а не прематематикой), занимались также и астрологией. Большая роль отводилась составлению различных численных астрономических таблиц.

В этот период были переведены на арабский язык уцелевшие греческие книги Евклида, Птолемея, Аполлония, Архимеда, Диофанта и др. Ставшее всеобщим применение названия «Альмагест» для «Большого собрания» Птолемея в средние века указывает на влияние арабских переводов на Европу. Благодаря этим воспроизведениям и переводам до нас дошли многие греческие классики, которые иначе оказались бы потерянными.

В течение IX – XIII веков исламский мир выдвинул таких крупных математиков, как ал-Хорезми, ал-Кархи, Омар Хайям, ат-Туси и другие.

Исламские работы в области точных наук, которые начались с перевода «Сиддханты» ал-Фазири, достигли своей первой вершины в деятельности Мухаммеда ибн Мусса ал-Хорезми, творчество которого приходится на первую половину IX века. Наиболее известной книгой, принадлежащей его перу, является книга по арифметике под названием «Об индийском счете, сочинение Алгоризми», арабский оригинал которой потерян, а латинский перевод двенадцатого столетия известен под названием «Algorizmi de numero Indozum».

В этой книге Ал-Хорезми пишет:

«Когда увидел я, что индийцы составляли из девяти букв любое свое число, благодаря расположению, какое они установили, я пожелал раскрыть, если будет угодно богу, что получается из этих букв, для облегчения изучающему» (История математики, 31, т. 1, с. 209).

Эта книга была одним из источников, с помощью которых Западная Европа ознакомилась с десятичной позиционной системой. Другая его книга, что была озаглавлена «Хисаб ал-джабр ва-л-мукабала», арабский текст которой сохранился, также стала известна на Западе в латинском переводе, а слово «ал-джабр» стало синонимом науки «алгебра». Эта книга была посвящена решению различного типа алгебраических уравнений, и она послужила главным источником, с помощью которого Западная Европа познакомилась с арабской алгеброй.

Другой крупной фигурой на математическом небосклоне является Омар Хайям, который сегодня более известен как один из великих персидских поэтов. Однако он был еще и выдающимся астрономом, создателем нового персидского календаря, а также математиком. Его перу принадлежит книга об алгебре под названием «Трактат о доказательствах алгебры и алмукабалы», в которой содержится систематическое исследование уравнений третьей степени. Применяя метод, которым иногда пользовались греки, Хайям определял корни этих уравнений как общие точки двух конических сечений. Он не искал числовых решений и различал «геометрические» и «арифметические» решения, причем последние рассматривались как существующие только тогда, когда значения корней оказывались положительными рациональными числами.

Для нашего изложения наибольший интерес представляет книга «Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида», написанная Хайямом около 1077 г. Эта книга посвящена изучению пропорций.

«[Хайям] подходит к обобщению понятия числа на любые положительные действительные числа. Он вводит понятие отвлеченной делимой единицы, и рассматривая отношение двух непрерывных величин A и B, говорит: “Выберем единицу и сделаем ее отношение к величине G , как A к B. Будем смотреть на величину не как на линию, поверхность, тело или время, но будем смотреть на нее как на величину, отвлеченную разумом от всего этого и принадлежащую к числам, но не к числам абсолютным и настоящим, так как отношение A к B часто может не быть числовым”. Так как под “числами абсолютными и настоящими” Хайям понимает вслед за греками натуральные числа, эта отвлеченная числовая величина трактуется как число в обобщенном смысле слова, так сказать, как “несобственный элемент” расширенной числовой области. Идеи Хайяма были восприняты и развиты ат-Туси» (История математики, 31, т. 1, с. 218).

В приведенной цитате мы встречаем два принципиальных момента, которые отличают подход Хайяма от греческого. Во-первых, Хайям вводит в рассмотрение абстрактную делимую единицу, что не могли сделать греки, у которых в натуральных числах отсутствовала единица. Во-вторых, он рассматривает части единицы как некий абстрактный объект, природа которого отличается от натуральных чисел.

Это также представляет собой шаг вперед не только по сравнению с греками, но с индийцами и с более ранними исламскими математиками: от ал-Хорезми и Абу-Камила до ал-Караджи и ас-Самавала. Таким образом, устанавливается связь между двумя типами понятий, одним из которых являются несоизмеримые геометрические величины, а другим – алгебраические величины, представляемые в виде выражения, содержащего радикалы. Ал-Караджи и ас-Самавал распространяли операции арифметики, включая извлечение корней, на выражения, состоящие из радикалов. Более того, ас-Самавал стремился найти неизвестное вещественное число, которое было бы представлено с помощью радикала как последовательность известных рациональных чисел.

Приведенные примеры только иллюстрируют уровень исследований исламской полуматематики, которые в своем традиционном алгоритмическо-алгебраическом духе представляли собой существенное продвижение по отношению к античной полуматематике. Лишь к концу шестнадцатого века Западная Европа смогла достичь того же уровня.

Ознакомление арабов и индийцев с математикой мало что дало для развития математики в методологическом плане. Отметим только то, что ни индийцы, ни арабы не внесли ничего *принципиально* нового в математику, ибо они не смогли овладеть дедуктивным мышлением. Все свои рассуждения они производили или на основании либо аналогий, либо опытных проверок. Выше мы уже говорили о некоторых причинах случившегося: новизна и необычность дедуктивного мышления, сложность ознакомления с этим мышлением, которое являлось частью чужой культуры, и т.п. Поэтому говорить об арабской или индийской математике вряд ли имеет смысл, ибо ее не было. А были индийские и арабские прематематика и полуматематика. Другими словами, индийцы и арабы, по существу, продолжали египетскую и вавилонскую прематематику, а также греческую полуматематику, оставив в стороне греческую математику, под которой мы понимаем геометрию.

Деятельность арабов и индийцев все же оказала некоторое влияние и на математику, правда, через полуматематику и прематематику. Об одном из их достижений, а именно об открытии и использовании десятичной позиционной системы представления чисел с помощью цифр, мы уже говорили выше. Введение и использование этой системы резко облегчило процесс проведения вычислений. Для записи цифр арабы и индийцы применяли различные обозначения, среди которых выделяются два типа: индийские обозначения, которые применялись восточными арабами, и так называемые цифры «губар», которые применялись западными арабами в Испании. Знаки первого типа и сегодня применяются в арабском мире, но наша современная система, по-видимому, произошла от «губар».

«Индийцы и арабы, подхватившие эстафету развития математики после окончательного уничтожения арабами эллинистической (александрийской) греческой цивилизации, в еще большой степени нарушили концепцию математики, сложившуюся у греков классического периода. Подобно своим предшественникам – грекам, индийские и арабские математики использовали целые числа и дроби, но они не колеблясь оперировали и иррациональными числами. Именно они ввели новые, верные правила сложения, вычитания, умножения и деления иррациональных чисел.

Как же индийцам и арабам удалось придумать правила, лишенные логического обоснования и тем не менее оказавшиеся верными? Загадка решается довольно просто: индийцы и арабы рассуждали по аналогии» (М. Клайн, 33, с. 130).

Эта цитата свидетельствует: несмотря на то, что М. Клайн употребляет слово «математика», исследования арабов и индийцев относились к полуматематике или к прематематике.

Современная математика снова появилась на Востоке только в конце XIX – начале XX века. Все страны той части света до этих пор развивались без математических знаний: строили здания и грандиозные архитектурные комплексы, развивали мореплавание и экономику и т.п. Все это свидетельствует еще раз о том, что нужды практической жизни вполне удовлетворялись пренаукой, т.е. не было никакой практической потребности в развитии даже полуматематики – достаточно было развивать прематематику. Использование полуматематики относилось скорее к области интеллектуальных искусств. В этом можно видеть еще одно доказательство того, что возникновение математики не является необходимым процессом, без которого трудно представить себе существование человечества.

4.2. Развитие европейской прематематики в Западной Европе.

Первое тысячелетие новой эры было одним из самых несчастливых периодов в научной жизни Западной Европы. Вот как описывает Б. Рассел создавшуюся в это время ситуацию:

«В течение всего периода среди мыслящих людей царило настроение глубокого отчаяния в отношении дел всего мира; единственное, что примиряло с ним, так это надежда на лучший мир в будущем. Это чувство отчаяния было отражением того, что происходило в Западной Европе. III столетие было периодом бедствий, в результате которых общий уровень благосостояния резко понизился. После временного затишья, которым было отмечено IV столетие, V столетие принесло крах Западной империи и утверждение варваров на всей ее бывшей территории. Богатые и культурные городские слои, на которых зиждилась цивилизация поздней Римской империи, в большинстве своем были низведены до положения нищих беженцев; оставшиеся кое-как добывали средства к жизни в своих сельских имениях. Примерно до X века один за другим следовали новые удары, не давая достаточной передышки для того, чтобы оправиться. Войны между византийцами и лангобардами уничтожили большую часть того, что еще уцелело от цивилизации Италии. Арабы завоевали большую часть Восточной империи, утвердились в Африке и Испании, угрожали Франции, а однажды даже разграбили Рим. Датчане и норманны сеяли опустошение во Франции и Англии, в Сицилии и южной Италии. В течение всех этих столетий жизнь была полна опасностей и лишений. Горестная сама по себе, она становилась еще горше благодаря господству диких суеверий. ... Жизнь для всех утратила всякую радость, за исключением тех, кто сохранил, да и то в счастливые мгновения, детскую беспечность» (Б. Рассел, 52, с. 320-321).

Когда вторгшиеся племена кельтов, германцев и славян образовали в Западной Европе вместе с местным населением свои государства, подвергшиеся, в свою очередь, в середине V в. нашествию гуннов, от прежней цивилизации остались только немногие едва прозябавшие города и христианство. Были практически полностью уничтожены многовековые интеллектуальные достижения греческой культуры. Греческая наука исчезла с лица Западной Европы, отправившись в изгнание на Восток. Только на окраинах Римской империи она сохранилась в книгах, которые привели к ее возрождению во второй половине первого тысячелетия в странах ислама. Вместе с греческой математикой исчезла и греческая прематематика, ибо те, кто собирал, хранил и передавал практические знания другим поколениям, исчезли в процессе завоевания Западной Европы варварами.

Вновь возникшая человеческая цивилизация должна была практически с самого начала создавать свою пренауку. Экономический, технический и культурный уровень долгое время был очень низким, вся общественная эволюция этого примитивного аграрного общества с экстенсивным земледелием, натуральным обменом происходила медленно. Связи с Востоком, особенно после того как арабы лишили Византию Средиземного моря, на некоторое время были полностью прерваны.

Церковь, господствовавшая над всей духовной жизнью, начала с того, что полностью отвергла греко-римскую культуру как порождение язычества. IV и V века были ознаменованы в Римской империи преследованием светских школ и ученых; наука уходила от христианства в подполье. Однако позже церковь была вынуждена заимствовать и даже развивать некоторые элементы «языческой» культуры и науки. Это заимствование было связано прежде всего с необходимостью определять время церковных праздников и служб, а также с проведением простейших экономических расчетов, касающихся долгов и запасов. Все эти и другие проблемы привели к тому, что монастыри стали важнейшими центрами, не только распространявшими просвещение, но и создавшими новые практические знания.

Вся экономическая жизнь в Европе была примитивной. В хозяйстве и в быту необходимые математические сведения не выходили за пределы элементарной начальной арифметики. Вся образованная прослойка европейского общества сосредоточилась в монастырях. Знать и миряне были почти полностью неграмотны. В монастырях хранились редкие книги по математике, среди которых наиболее популярными были сочинения Северина Боэция, переведшего на латинский язык «Арифметику» Никомаха и часть «Начал» Евклида. Собственно, только монастыри, благодаря тому, что они представляли собой крупные хозяйства, нуждались в прематематике, которая начала свое развитие практически с нулевой точки.

Здесь необходимо отметить работу ирландского монаха Беды Достопочтенного, которая представляла собой трактат, посвященный вычислению хронологических дат Пасхи, с которыми жестко связаны другие важные христианские праздники. В этом же трактате имеется полное описание счета на пальцах. Различные загибы пальцев изображали различные порядки чисел, что позволяло осуществлять арифметические операции на числах, включая умножение и деление.

X – XI века являются тем периодом времени, начиная с которого вся интеллектуальная жизнь Западной Европы стала изменяться. Этот перелом можно объяснить двумя причинами.

Во-первых, резким изменением хозяйственного уклада, когда на арену общественной жизни вышло новое сословие, состоящее из горожан, занимающихся торговлей и ремеслами. Деятельность этих горожан требовала создания, хранения и передачи создаваемых практических знаний, в том числе и прематематических. Среди этого сословия резко возросло количество образованных людей. Этот новый слой стал соперником монастырей в развитии, в частности, прематематики, ибо их деятельность часто формулировала такие новые количественные практические задачи, которые уже не могли возникнуть из деятельности монастырей и церкви.

Во-вторых, в Европу мощным потоком стали проникать знания, в том числе математические и прематематические, накопленные в исламском мире. Центрами новой жизни были итальянские города и также города Центральной Европы, такие, как Нюрнберг, Прага, Вена. Все это сказалось как на прематематике, так и на математике.

Эти перемены вызвали усиленное развитие пренауки, в частности, прематематики. Европейская прематематика возникла и развивалась без всякой связи с забытой греческой прематематикой. Греческая логистика «канула в Лету». Вместо нее в Европе возникла так называемая «техника счета». Она появилась сначала в итальянских городах, ибо Италия была наиболее развитой экономической областью в Европе, а затем распространилась на другие области. Развитие прематематики связано и с тем, что к этому времени стали налаживаться связи с Востоком. Первые соприкосновения европейской прематематики с мусульманской и индийской прематематикой произошли в X – XI веках, когда итальянские купцы завязали тесные связи с Востоком.

В дальнейшем контакты с мусульманским миром расширялись за счет крестовых походов и войн за освобождение Испании от мавританского владычества. Контакты с Испанией оказали большое влияние на распространение знаний во Франции и Англии. В частности, когда в 1085 г. Толедо был отвоеван христианами у мавров, студенты западных стран толпами устремились в этот город для изучения арабской науки.

Большое значение в практической жизни имело распространение в Европе *абака* – прибора для проведения расчетов, который сыграл большую роль в развитии нумерации и практических приемов счета. До появления абака весь практический счет велся в основном на пальцах. Хотя абак мы встречаем уже у греков и римлян, но европейцы получили этот прибор через арабов, которые в свою очередь переняли его от индийцев. Слово «абак» (счетная доска) – греческое, происходящее от древнееврейского слова, означающего «пыль».

Одним из первых привез абак в Европу в X веке французский монах Герберт, который в 999 – 1003 был папой римским под именем Сильвестра II. Усилиями многочисленных его учеников и последователей, а также благодаря его влиянию как главы католической церкви, абак получил широкое распространение в Европе. Его использование стало настолько необходимым для выполнения различных видов вычислений, что слово «абак» часто служило синонимом слова «арифметика». Метод абацистов, пропагандистом которого был Герберт, дает упрощения, аналогичные использованию нашей позиционной системы, по крайней мере для сложения и вычитания, тогда как умножение и особенно деление оставалось еще очень сложным.

«Постепенно в течение XI и XII вв., благодаря проникновению в Европу евреев, был принят обычай производить действия по арабскому образцу, записывая их на песке или пыли. Абацистов сменили алгоритмики, которые использовали нуль и арабский метод деления и извлечения квадратного корня. Эти новые способы счета оказались одним из главных вкладов в дело интеллектуальной подготовки науки на Западе – особенно если вспомнить трудности греческой логистики» (А. Даан-Дальмедико, Ж. Пейффер, 23, с. 29).

Интенсивное знакомство европейцев с десятичной позиционной системой записи чисел началось с XII в., с перевода на латинский язык арабских книг по арифметике, в первую очередь арифметики ал-Хорезми. Имя ал-Хорезми в его латинских формах – чаще всего Algorithmus или Algorismus – превратилось в название новой арифметики. История проникновения десятичной позиционной системы в Европу, по существу, многим обязана Леонардо Фибоначчи из Пизы, написавшему «Книгу абака» (1202 г.), в которой была описана и применена эта система. Однако десятичная система проникала в Западную Европу медленно, и самая ранняя французская рукопись, в которой мы это находим, относится к 1275 году. В последующие столетия десять цифр все больше и больше использовались в практической жизни. Распространению арифметики, основанной на десятичной системе, содействовало появление чисто светских школ, в которых обучались молодые люди, чтобы затем работать по торговой или финансовой части. По-видимому, такие школы впервые появились в Италии. В 1338 г. во Флоренции имелось шесть школ абака и алгорифмиков.

Однако только тогда, когда появилась одна из первых печатных книг по математике «Сумма арифметики», которая принадлежала перу францисканского монаха Луки Пачоли, пользование десятичными цифрами стало общепринятым.

С начала XIII в. в Западной Европе существовали рядом две системы изложения арифметики: одна – при помощи абака, другая – посредством индийской нумерации или алгоритма. Если одни применяли абак, то другие использовали листы бумаги с проведенными прямыми линиями, т.е. проводили счет на линиях. Флагом для первого течения был Герберт, а для второго – Леонардо Пизанский. В конечном счете победу алгорифмиков обеспечила практика, а именно развитие торговли с Востоком. Европейские купцы оценили преимущества той арифметики, которой пользовались арабские. Каждый торговый город заводил своего «учителя арифметики», который обучал новой арифметике работников, связанных с торговлей. Эти учителя и обеспечили победу данной арифметики и ее основы – позиционной системы счисления.

Вместе с расширением торговли интерес к прематематике постепенно стал распространяться на северные страны. Поначалу это был практический интерес, и в течение нескольких столетий арифметику и алгебру преподавали вне университетов профессиональные мастера счета, которые обычно не знали классиков, но зато обучали бухгалтерии и навигации. Им же пришлось удовлетворять практические потребности в проведении числовых расчетов в строительстве, архитектуре, торговле и других отраслях деловой деятельности, основанных на опыте и интуиции. Благодаря этим мастерам счета, а также различным специалистам был накоплен большой опыт в решении практических задач, который выразился в создании методик их решения, т.е. порядка проведения числовых расчетов. Свидетельства этому можно легко найти, например, в работах инженеров и архитекторов времен Возрождения. Эти методики проведения практических расчетов пополнили арсенал прематематики. Однако сами по себе расчеты, связанные с инженерной и хозяйственной деятельностью, были относительно простыми.

До XV в. вся прематематика, используемая в Европе, была в своей основе индийской, переданной с небольшими изменениями арабами. В это время, как и у индийцев и арабов, по традиции, идущей от Диофанта, для обозначения часто встречающихся понятий употреблялись отдельные буквы или сокращения соответствующих слов. Принципиальные изменения начали происходить в XV в., когда в прематематике стали использовать символы. Необходимость в обозначениях, которые позволили бы сократить вычисления, с развитием торговли и становлением товарного хозяйства становилась постоянной. Немецкая школа, которая получила название «косс», стремилась выработать удобные обозначения и ввела в формулах сокращения от таких слов, как res, radix, census и т.д. Эти обозначения называются классическими символами. Улучшение символики для выполнения арифметических действий, а также повышение эффективности самого процесса выполнения действий продолжались несколько столетий.

Под давлением практических потребностей и в связи с изобретением книгопечатания появились многочисленные учебники арифметики. Самыми старыми из таких учебников была «Арифметика из Тревизы» (1478) неизвестного итальянского автора и ее немецкий аналог – «Бамберская книга о счете» (1483). Книга М. Штифеля «Полная арифметика» (1544) содержит в себе все символы арифметических операций, которые были введены ранее (например, + и -). В своей книге Штифель также ввел в употребление современное обозначение радикала. Это книга имела большой резонанс, и обозначения Штифеля распространились далеко за пределы Германии вплоть до Италии.

Другое направление в прематематике связано с построением числовых таблиц, что применялись при использовании астрономической системы Птолемея – Гиппарха. Первые подобные таблицы, как уже отмечалось выше, были построены Гиппархом, а затем пополнены и улучшены Птолемеем еще во времена Римской империи. Очень часто в современной исторической литературе эти таблицы называют таблицами тригонометрических функций. Такое утверждение – это еще один наглядный пример, как современный математический язык неверно отражает содержание того, что делалось в те давние времена. Те объекты, которыми пользовался Птолемей, только по далекой аналогии напоминают тригонометрические функции, математическая формулировка которых оформилась лишь в XVIII в. Позже похожие таблицы появились и у арабских астрономов, таких, как, например, ал-Хорезми, ал-Баттани, Абу-ал-Вафа, ал-Заркали.

Достижения европейской прематематики хорошо иллюстрируются трудами одного из ведущих деятелей пятнадцатого века – Иоганна Мюллера из Кенигсберга, более известного под именем Региомонтанус. Этот математик был замечательным вычислителем, мастером инструментов и печатником. Он усердно переводил и публиковал доступные ему математические рукописи классиков. Он перевел Аполлония, Герона и Архимеда. Региомонтанус закончил также труд своего учителя, астронома из Вены Г. Пурбаха, – перевод «Астрономии» Птолемея. Его собственное оригинальное произведение – книга «О различных треугольниках» – было опубликовано только в следующем столетии. Эта книга является введением в тригонометрию, которая отличается от современных учебников только отсутствием современных удобных обозначений, причем все теоремы формулируются словесно. Она оказала глубокое влияние на дальнейшее развитие тригонометрии и на ее применение в астрономии и к алгебре.

… новые изобретения,
не краденные ни у Платона, ни у Плотина,
ни у какого грека и латинянина,
а полученные лишь искусством, измерением и разумом…

Н. Тарталья

4.3. Развитие математики и полуматематики в Европе.

Как мы уже отмечали выше, математика вернулась в Европу только в XII – XIII веках, благодаря арабским книгам. По существу, тысячу лет Европа жила без математики и совсем не чувствовала ее нехватку. Для решения необходимых практических задач достаточно было прематематики.

Сам факт, что европейцы стали заниматься математикой, тогда как во всем мире в то время практически прекратили заниматься ею, вызывает такое же восхищение, похожее на то, которое вызывали древние греки, когда они в течение тысячи лет практически в одиночку занимались математикой. Естественно возникает вопрос – почему европейцы стали интересоваться математикой? Возвращение математики в Европу не было вызвано никакими практическими соображениями. Что за причины возбудили чисто интеллектуальный интерес, напрямую связанный с интеллектуальным любопытством? Ведь к этому времени математика даже в исламских странах практически исчезла, хотя здесь и там встречались отдельные личности, которые еще могли заниматься и занимались полуматематическими исследованиями.

Два мира образовались в результате распада Римской империи и разделении христианской церкви на католическую и православную (ортодоксальную). Окончательное разделение церкви произошло в 1054 г. Если мы сравним достижения в области математики этих двух частей бывшей Римской империи, то увидим значительные различия. Византия, в которой продолжали жить греческие ученые и которая поддерживала связи с исламским миром, не сделала в области математики ничего, что хоть приближалось бы к математике в странах ислама. Византийские ученые, как и исламские, уже не владели греческим образом мышления, основанным на дедукции. Возникает вопрос: почему получилось такое разительное отличие?

Можно найти ответ в разном уровне развития экономической жизни, что соответствует уровню культуры. Однако в то время уровень экономической жизни был более высоким в Византии, которая торговала со многими странами. Поэтому причина такого отставания вряд ли имеет материальный характер. Следовательно, она находится в интеллектуальной сфере.

Эта причина, на наш взгляд, кроется прежде всего в теологических различиях католицизма и православия. Католическая теология с самого начала включила в свой состав многое из греческой философии — в основном Платона и неоплатоников. Более того, познакомившись с греческим наследием у арабов в Испании, в частности, с оригинальными трудами Аристотеля, католические теологи начали внедрять логику Аристотеля в теологические рассуждения. Это осуществили уже в XIII веке схоласты. Такой поворот событий свидетельствовал о том, что католическая религия обладала чем-то, что способствовало достаточно быстрому усвоению греческого способа мышления. Ничего подобного нельзя встретить у ортодоксальных теологов.

Ни мусульманская религия, ни буддизм и ни другие индийские и восточные религии не способствовали усвоению греческого наследства в течение более тысячи лет. Как мы уже неоднократно говорили, арабские и индийские ученые не смогли приобщиться к греческому способу мышления, что, в частности, выразилось в том, что они не занимались математическими доказательствами теорем.

В противоположность арабам и индийцам Западная Европа освоила греческий способ мышления в течение двух-трех веков. Основная причина этого феномена, как мы уже говорили, заключается в глубокой связи, почти с первого дня своего рождения, христианской теологии с греческой философией. В ранней католической теологии, как мы уже говорили выше, основанной на трудах таких теологов, как св. Августин, легко прослеживается влияние философии Платона. Другими словами, европейская интеллектуальная мысль, связанная с христианством, никогда полностью не отрывалась от греческой традиции. Позже, уже в XIII веке, схоластическая философия, особенно благодаря трудам св. Фомы Аквинского, завоевала значительное место в католической теологии.

«В своих общих чертах философия Фомы Аквинского сходна с философией Аристотеля. … Оригинальность Фомы Аквинского обнаруживается в том, что он сумел приспособить Аристотеля к христианской догме, подвергнув его учение лишь самым незначительным изменениям. … Замечательны те отчетливость и ясность, с которыми он отличает доказательства, полученные при помощи разума, от доказательств посредством откровения. Фома Аквинский хорошо знает Аристотеля и превосходно его понимает, что нельзя сказать ни об одном из предшествующих католических философов» (Б. Рассел, 52, с. 480).

Схоласты широко стали применять логику Аристотеля в своих теологических исследованиях, поставив во главу дедуктивный вывод утверждений. Многочисленные примеры можно найти у Фомы Аквинского, который, по аналогии с Аристотелем, доказывал существование бога. С этого времени во всех учебных заведениях католической церкви стали изучать логику Аристотеля, которая благодаря этому вошла в плоть и в кровь католицизма, а через него и в образованную часть католической Европы. Понятие доказательства утверждений, которое существовало только у древних греков, «приобрело гражданство» в Европе. Именно схоластическое воспитание, которое получила значительная часть образованного населения Западной Европы, дало возможность отдельным его представителям изучить геометрию Евклида и самостоятельно доказывать геометрические теоремы. В этом великая и принципиальная заслуга схоластов, без которых не могла бы осуществиться интеллектуальная революция XVII в., заложившая основы современного технологического прогресса человечества.

Поэтому можно приветствовать слова одного из крупных математиков XIX-XX вв. Ф. Клейна в защиту схоластики.

«Глубоко несправедливым является общераспространенный презрительный взгляд на схоластику как на теряющееся в бесплодных мудрствованиях направление ума. … Окидывая общим взором пройденный путь развития, мы должны сказать, что в очень редкие эпохи дух критики, стремление разложить на простейшие элементы всякий логический шаг, «идеал строгости» были столь сильны, как во времена схоластики» (Ф. Клейн, 33, с. 83).

Европейские ученые переняли от греков не только собственно математические знания, но и, в определенном смысле, общее отношение к математике, которое вытекает из греческой философии, точнее, из ее космологической теории. Из произведений греческих ученых они узнали, что природа построена на математических принципах и что план творения гармоничен, эстетически привлекателен и являет собой сокровенную истину о природе. Природа не только рациональна и упорядочена, но и действует в соответствии с неизбежными и неизменными законами.

Если греки верили в то, что природа следует некоторому идеальному плану, в основе которого лежат математические принципы, то европейские ученые приписывали «сотворение плана» и все происходящее в природе христианскому богу. Здесь кроется определенное противоречие, ибо эти ученые были верующими христианами. Примирить эти две точки зрения удалось только тогда, когда было принято, что христианский бог при создании Вселенной руководствовался математическими принципами. С этого момента поиск математических законов природы стал носить религиозный характер, целью которого были попытки понять божий замысел. Такой синтез религии и математики продолжался до конца XVIII в., когда ряд французских ученых стали противопоставлять науку религии.

Несмотря на то, что математика как наука в Европе перестала существовать с распадом и уничтожением Римской империи, все же некоторые математические вопросы, связанные с выявлением сущности континуума и бесконечности, не переставали волновать католических теологов. Если один из первых христианских богословов Ориген, следуя Аристотелю, отрицал существование актуально бесконечного, то св. Августин в своем «Граде божьем» принимал всю последовательность целых чисел как актуальную бесконечность. Он говорил об этом так, что, по замечанию Г. Кантора, нельзя более энергично стремиться к трансфинитному и нельзя его лучше определить и обосновать, чем св. Августин. Таким образом, с большой натяжкой можно сказать, что все же математика как часть философии полностью не умерла в Европе, и ее отголоски продолжали существовать в католической теологии.

Важную роль в развитии математики в Европе сыграли университеты. Старейший в Европе университет – медицинский – был основан в Салерно в первой половине XI в. Около 1100 г. был открыт университет в Болонье, вначале он представлял собой юридическую школу. На базе нескольких монастырских школ в конце XII в. вырос Парижский университет. Примерно тогда же был создан Оксфордский университет, а в 1209 г. – Кембриджский. В последующие столетия появляются университеты и в других городах Европы: в Праге, в Кракове, в Вене и т.д. Обычно университеты имели сходное строение: они состояли из четырех факультетов – богословия, права, медицины и искусств; последний был обязателен для всех, кто претендовал на богословскую степень. Наиболее популярным и влиятельным был богословский факультет. Математике обучали в объеме квадривиума на факультете искусств, а некоторые более тонкие вопросы излагались в курсах философии на богословском факультете, особенно с конца XIII в., ввиду возросшего влияния философии Аристотеля.

Изучение математики в университетах было на довольно низком уровне: теоретические знания ограничивались обычно первой книгой «Начал» Евклида. Правда, позже это не помешало появлению таких математиков, как Лука Пачоли, Томас Брадварин, Николь Орем, Николай Коперник и др. Однако основную роль для последующего развития математики сыграл богословский факультет, на котором студенты обучались дедуктивному мышлению на основе логики Аристотеля. Именно это обучение и определило будущее развитие математики в Европе, ибо ни в одном другом месте в мире не обучали греческому способу мышления.

Другим предметом обучения в университетах была астрономия (астрология), в центре которой лежала система Птолемея – Гиппарха. В качестве примера можно привести университет в Болонье, который был в конце пятнадцатого столетия одним из самых больших и известных университетов в Европе. Было время, когда только астрономический факультет университета насчитывал шестнадцать лекторов. Болонский университет стал в рассматриваемое время также одним из центров математических исследований, свидетельства чему мы приведем ниже.

Появление книгопечатания существенно облегчило распространение математических знаний. Позже, в связи с распространением этих знаний и увеличением количества занимающихся математикой, обмен информации происходил при помощи переписки, организации математических кружков, что привело к созданию академий и научных обществ, издающих специальные журналы. Отношение к математике со стороны занимающихся ею в это время продолжило традицию греков, т.е. математику рассматривали как симбиоз интеллектуального искусства и интеллектуального спорта.

В эпоху, когда не существовало научных журналов, активность математиков находила свое выражение в переписке ученых и в деятельности дискуссионных кружков. Университеты оставались верны средневековой программе и не играли практически никакой роли в подъеме науки. Поэтому дискуссионные кружки, которые были в определенном смысле оппозицией университетам, послужили основой для создания академий. Вновь созданные академии были проникнуты новым духом, отличным от схоластического, зажатого в строгие рамки подхода к проведению исследований. Первая академия была основана в Неаполе в 1560 году. Затем возникла академия в Риме (1603 г.). Лондонское королевское общество существует с 1662 года, а Французская академия – с 1666 года. Основание научных обществ было вызвано желанием установить обмен научной информацией и упростить встречи людей с одинаковыми научными интересами.

Вообще, математикой в Европе занимался ограниченный круг людей: монахи в монастырях, профессора в университетах, люди свободных профессий, имеющие средства и свободное время для интеллектуальных занятий. Занятия математикой не приносили этим людям никаких материальных благ. Для них математика была тем интеллектуальным, искусственно построенным ими миром, в который человек мог уйти от серой повседневной жизни, окружавшей его, и где он мог получить определенное интеллектуальное удовольствие и удовлетворение. Другими словами, математика была одним из видов интеллектуального искусства. Кроме того, часто устраивались, например, в Италии, состязания по решению тех или иных математических задач, и математики принимали участие в этих интеллектуальных играх.

Греческая математика начала возвращаться в Западную Европу, как мы уже отмечали выше, только в XII веке, когда Европа стала знакомиться с оригинальной греческой культурой, содержащейся в книгах греческих авторов, а также с произведениями арабских математиков. Эти книги стали проникать в Европу и с востока, и с запада. На востоке крестовые походы и образование Иерусалимского королевства столкнуло между собой две культуры: западно-христианскую и мусульманскую. На западе книги приходили из Испании. Поэтому все дальнейшее развитие математики происходило под полным влиянием книг древних греков и арабов, с которыми европейцы стали знакомиться по переводам с арабского языка.

Переводческая деятельность с арабского стала бурно развиваться по мере Реконкисты – возвращения испанцами Пиренейского полуострова. Когда в 1085 г. был взят Толедо, сюда ринулись жаждущие знаний. В скором времени здесь уже работала целая группа переводчиков, которую составляли люди различных национальностей. Подобные группы переводчиков работали также в Барселоне и Сеговии.

Одним из первых переводчиков был английский ученый Аделард из Бата, написавший книгу «Правила абака». Он первый перевел «Начала» Евклида в пятнадцати книгах на латинский язык. Другой англичанин, Роберт из Честера, перевел в Сеговии в 1145 г. алгебраический трактат ал-Хорезми, положив начало алгебраическим знаниям европейских ученых. Наиболее выдающимся переводчиком той эпохи был Герардо из Кремоны, переведший «Алмагест» Птолемея, «Начала» Евклида, алгебру ал-Хорезми и ряд трудов арабских и греческих ученых (всего он перевел почти 90 трудов). Необходимо отметить, что в то время переводы с греческого были редкостью.

Развитие европейской математики до XVII в. можно условно разделить на два периода: XII – XIV вв. и XV – XVI вв. Если в первый период происходило, по существо, знакомство с миром греческой и арабской математики, то во втором периоде европейские ученые сами стали проводить исследования, не только сравнимые по своему уровню с лучшими достижениями греческих и мусульманских математиков, но даже превосходящие их по сложности.

Из деятелей первого периода отметим Леонардо Пизанского, известного также под именем Фибоначчи. Он был первым самостоятельным математиком Европы, полностью осветившим все достижения математиков стран ислама. Основным трудом Леонардо является «Книга абака», о которой мы упоминали в предыдущем параграфе. В этой книге он систематизировал огромное количество сведений, почерпнутых из арабских трудов, добавив к этому собственные задачи и методы. Здесь впервые появляется последовательность Фибоначчи. «Книга абака» резко возвышается над арифметико-алгебраической литературой XII – XIV вв. разнообразием и силой методов, богатством задач, доказательностью утверждений. Уровень этой книги оказался слишком высоким для своей эпохи, и она не изучалась в школах. Однако последующие математики черпали из нее как задачи, так и приемы решений, которые в последующие века разошлись по многочисленным книгам на разных языках. Задачи Леонардо можно встретить в «Алгебре» Л. Эйлера и даже позднее.

В XIV в. процветали школы натурфилософии Оксфорда и Парижа, в которых зародилось отношение к математике как специальному инструменту познания природных явлений. Ведущие представители этих школ Никола Орем, Томас Брадвардин, Роберт Бэкон, Ричард Суайнсхед пытались найти количественное выражение некоторых качеств или явлений, таких, как теплота, плотность, скорость и т.п. Данным качествам эти ученые сопоставлялись «степени интенсивности», «непрерывно» изменяющиеся в определенных пределах, стремясь свести эти измерения к определенной шкале измеримых величин. Н. Орем писал: «Всякая измеримая вещь, за исключением чисел, может мыслиться как непрерывная величина».

Ученые Парижской и Оксфордских школ разработали ряд понятий: движения, скорости, ускорения, мгновенной скорости и др. Таким образом был сделан важный в теоретическом плане шаг, ознаменовавший начало подхода к законам природы как к законам функционального типа и установлена связь между математикой и кинематикой. «Всякая кинематика основана на интуитивной идее величины, изменяющейся со временем, т.е. функции времени»,— отметил Н. Бурбаки.

В XIV – XV вв. математика развивается главным образом в Италии, Франции и Германии, в конце XVI в. присоединяется Голландия. Наибольших успехов математики Европы в этот период добились в области алгебры. Крупнейшим алгебраистом XV в. был итальянец Лука Пачоли, который преподавал математику в ряде итальянских университетов. Основным трудом Л. Пачоли была книга «Сумма по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности», изданная в Венеции в 1494 г. Эта книга была настоящей суммой математических знаний той эпохи. В ней была полностью воспроизведена «Книга абака» Леонардо Пизанского, о которой мы уже говорили выше. В своей книге Пачоли вводит в алгебру, которую он называет «regula della cosa» («правило вещи») и «arte maggiore» («великое искусство»), символические обозначения, так называемые «алгебраические буквы». Здесь же он широко использует отрицательные числа, на трактовку которых оказал влияние тот факт, что Пачоли был изобретателем двойной бухгалтерии. Основные положения этой бухгалтерии он также изложил в своей книге.

«Алгебраические буквы», которыми Пачоли обозначал неизвестную величину и ее степени и которыми с незначительными видоизменениями пользовались итальянские алгебраисты в XVI в., были важным шагом на пути создания алгебраической символики. Следующий шаг был сделан немецкими алгебраистами XVI в., известными под названием «коссистов». Это название объясняется тем, что они именовали алгебру «Coss», от итальянского слова «cosa» – вещь, обозначавшую неизвестную величину у итальянских алгебраистов.

Такое название алгебры мы встречаем у Яна Видмана в заглавии его книги «Regel Algebre oder Cosse», где излагались алгебраические правила. Он был первым, кто начал преподавать алгебру в университете. В другой своей книге, посвященной арифметике, Видман впервые ввел знаки + и – для обозначения сложения и вычитания. Наиболее знаменитыми коссистами были Адам Ризе, написавший учебник «Coss» (1524), и Кристоф Рудольф, также выпустивший в 1525 г. учебник под традиционным названием «Быстрый и красивый счет при помощи искусных правил алгебры, обычно называемых Косс». Крупнейшим из коссистов был Михаэль Штифель, издавший на латинском языке «Полную арифметику» (1544), которую мы упоминали выше.

Коссисты широко использовали арифметические действия над квадратными корнями, а также изучали выражения, содержащие квадратные корни. Вычисления с иррациональными числами производились без затруднений, но все же коссистов беспокоила проблема, можно ли считать иррациональные числа «настоящими числами». Такой вопрос возникал потому, что любые иррациональности легко представимы как геометрические величины, согласно традиции, идущей от греков. Но их представление в цифровой записи обычно требует бесконечного числа цифр, т.е. их нельзя записать с помощью цифр. В качестве примера такой дискуссии приведем слова Штифеля из его «Полной арифметики»:

«…так как при доказательстве [свойств] геометрических фигур иррациональные числа заменяют рациональные всякий раз, когда те отказываются служить нам, и доказывают все то, что не могли доказать те … приходиться признать, что они [иррациональные числа] являются истинными числами. К тому же нас вынуждают и результаты, проистекающие из их применения, которые нельзя не признать подлинными, достоверными и незыблемыми. С другой стороны, явные соображения заставляют нас отрицать, что иррациональные числа вообще являются числами. Такое сомнение подкрепляется тем, что если мы попытаемся записать иррациональные числа в десятичной форме … то обнаружим, что они непрестанно ускользают от нас и ни одно из них не удается постичь точно. … Число же, которому в силу его природы недостает точности, не может быть названо истинным числом. … Следовательно, подобно тому как не является числом бесконечность, иррациональное число также не является истинным числом, а как бы скрыто от нас в облаке бесконечности».

Далее Штифель добавляет, что настоящие числа – это либо целые числа, либо дроби, а поскольку иррациональные числа не принадлежат ни к тем, ни к другим, их нельзя считать настоящими числами. Столетие спустя Паскаль и Барроу утверждали, что иррациональные числа не более чем символы, не существующие независимо от геометрических величин, и что логика арифметических операций, производимых над иррациональными числами, должна быть обоснована с помощью геометрических соображений.

Вернемся к алгебре. Пачоли закончил раздел «Суммы» об алгебраических уравнениях замечанием, что для решения определенных уравнений третьей степени «искусство алгебры не дало способа, как не дан способ квадратуры круга». Эти слова Пачоли послужили отправным пунктом для работ итальянских алгебраистов по решению кубических уравнений в радикалах, открытие которых было первым крупным математическим достижением европейских ученых, существенно превзошедшим открытия математиков Востока.

Первому удалось решить один из видов кубического уравнения в радикалах профессору Болонского университета С. дель Ферро, который это решение не опубликовал. Никола Тарталья самостоятельно нашел правило дель Ферро. Эти открытия Тарталья были опубликованы в алгебраическом трактате Джироламо Кардано «Великое искусство, или об алгебраических правилах» (1545). В 1539 г. Кардано, узнав об открытии Тартальи, выпросил у него формулировку решения, поклявшись не публиковать его. Тарталья сообщил свое правило в стихотворении из 25 строк. Восстановив по не вполне ясным формулировкам правило и доказав его, Кардано счел себя вправе поместить решение в своей книге, упомянув об авторстве Тартальи. Несмотря на это, за правилом закрепилось название «формула Кардано». В своей книге Кардано также изложил открытый его учеником Луиджи Феррари метод решения уравнения четвертой степени. В ней же впервые встречаются новые математические объекты – мнимые величины.

Кардано называл мнимые величины «чисто отрицательными». Он считал их бесполезными и стремился не применять их. Первым математиком, оценившим пользу мнимых величин, в частности, при решении кубических уравнений, был Рафаэль Бомбелли, последний в блестящей плеяде итальянских алгебраистов XVI в. и оказавший влияние на ряд более поздних математиков (Стевин, Гюйгенс, Лейбниц и др.).

Труды перечисленных выше математиков подготовили почву для появления одного из замечательных математиков XVI в. – Франсуа Виета, который в значительной степени завершил работу предшественников по созданию символической алгебры. Общие идеи и основные правила Виет изложил в книге «Введение в аналитическое искусство» (1591).

В этой работе он впервые ввел в рассмотрение уравнения с буквенными коэффициентами. Обозначать буквой неизвестное в уравнении стал еще Диофант. Буквы в уравнениях встречаются и у других математиков, но только Виет стал первым систематически и сознательно применять буквенные обозначения в уравнениях. Работа Виета открыла путь, ведущий к таким основным математическим понятиям, как аналитическая формула и функция, что позволило развить в дальнейшем аналитическую геометрию и математический анализ.

Благодаря введению буквенных коэффициентов, возникла новая математическая дисциплина, т.е. новая область для математических исследований, которую можно назвать общей теорией алгебраических уравнений. Развитие этой теории оказало существенное влияние на проблематику в алгебре. Здесь можно было найти общие утверждения о преобразовании корней, о построении уравнений, обладающих корнями с специфическими свойствами, о зависимостях между корнями и коэффициентами и т.п. В качестве примера можно привести известную теорему Виета, связывающие корни уравнения с его коэффициентами, которую изучают в школе. Указанная теорема содержала в себе ряд идей (симметрические функции, разложение многочлена на произведение из многочленов первой степени), которые привели в последствии к открытию основной теоремы алгебры о числе корней алгебраического уравнения любой степени.

В этом направлении его исследования продолжили Т. Гарриот, А. Жирар и Р. Декарт. Гарриот усовершенствовал символику Виета, доведя ее почти до современного вида. А. Жирар впервые сформулировал основную теорему алгебры, которая была доказана только в XVIII в. О вкладе Р. Декарта в алгебру мы подробно будем говорить в главе 6.

Открытие Ф. Виета можно приравнять по своему значению к таким открытиям в математике и в прематематике, которые обозначили новые горизонты для исследований, благодаря изменению формы записи или представления результатов исследований. Среди подобных новшеств можно отметить введение десятичной позиционной системы для представления чисел, символику Лейбница в математическом анализе. Подходящее обозначение лучше отражает действительность, чем неудачное, и оказывается как бы наделенной собственной жизненной силой, которая в свою очередь порождает новое знание.

Нам сегодня, благодаря развитию математики, достаточно трудно по праву оценить все революционное значение этого нововведения, ибо нам кажется этот шаг простым и достаточно логичным и очевидным. Однако с позиций существовавшей тогда математики это совершенно не так. Для этого изобретения Виет должен был обладать достаточно изощренным умом.

Попытаемся обосновать наше утверждение.

Во-первых, этим своим нововведением Виет ввел в математику принципиально новый математический объект, который обладал наибольшей степенью абстракции среди всех встречающихся до тех пор математических объектов. Этот объект – алгебраическое уравнение с буквенными коэффициентами – представляет собой, с одной стороны, бесчисленное множество всех уравнений, каждое из которых есть уравнение с конкретными числовыми коэффициентами. С другой стороны, любое математическое утверждение относительно уравнения с буквенными коэффициентами является в то же время и утверждением относительно и каждого конкретного уравнения с конкретными числовыми коэффициентами.

Во-вторых, благодаря такому подходу появилась наконец возможность формулировать и доказывать алгебраические утверждения на таком же уровне общности, как и геометрические теоремы. Это был первый, но принципиально важный шаг на пути к построению *алгебры как математической теории* и алгебраизации всей математики. Оглядываясь назад, можно с полной уверенностью сказать, что именно это чисто техническое нововведение, которое, возможно, трудно назвать открытием, обеспечило в последующем создание и развитие всей европейской математики.

В-третьих, введение буквенных коэффициентов в записи квадратных уравнений является первым шагом в построении символического математического языка, без которого не могло быть прогресса в математике. Введение записи символами для представления математических зависимостей изменило лицо математических исследований, расширив их границы и углубив их. Эти изменения естественным образом связаны с тем, что символическая запись математических зависимостей позволила вводить новые математические понятия, тем самым создав специфический математический язык, отличный от геометрического представления математических зависимостей. Именно отсутствие символической записи было причиной недостаточного распространения математических моделей в древности и сдерживающим фактором в развитии математики до XVII века.

В-четвертых (что вытекает из третьего), самым замечательным следствием новшества Виета является введение в рассмотрение математических формул. По своей сути, это понятие можно отнести как к прагматическому, так и к интеллектуальному познанию. Понятие «формула» связывает теоретическую математику с прематематикой. Этому понятию можно дать два определения.

Под *формулой* понимается некий алгоритм решения однородного множества конкретных задач, записанный с помощью символов. Так как формула представляет собой запись алгоритма решения задачи, то на нее можно смотреть как на прагматическое знание.

Можно дать и другое определение понятию формула. Под *формулой* понимается математический объект, описывающий на символическом языке связь между другими математическими объектами. В свете этого определения формула представляет собой уже интеллектуальное (математическое) знание.

Введение в рассмотрение математических формул имеет очень глубокий философский смысл. Формула, математически выведенная, представляет собой, с одной стороны, интеллектуальный продукт, являющийся результатом интеллектуальных рассуждений, а с другой – ее можно рассматривать как прагматическую *гипотезу*, которая проверяется опытом.

Знакомство европейцев с греческой геометрией оказало большое влияние на развитие европейской живописи и архитектуры. Особенно ярко это влияние проявилось во времена итальянского Возрождения, когда значительное внимание было уделено вопросам перспективы. Здесь необходимо отметить трактат архитектора Л.-Б. Альберти «О живописи» (1435) и трактат художника П. деи Франческо «О перспективе в живописи» (1489), в которых изучались вопросы построения перспективы геометрических фигур. Проекции различных частей человеческого тела на три взаимно перпендикулярных плоскости посвящен трактат А. Дюрера «О человеческой пропорции» (1528).

В 1558 году был издан выполненный Коммандино перевод на латинский язык работ Архимеда, который открыл перед европейцами античный интеграционный метод. Эта книга послужила катализатором для появления ряда прематематических работ в области статики и гидравлики. Более того, эта книга также стимулировала исследования в новой области математики, которая впоследствии получила имя «математический анализ». Важным шагом в этом направлении была книга Бонавентуры Кавальери «Геометрия», в которой автор построил упрощенную схему исчисления бесконечно малых, основанную на схоластическом представлении о неделимых величинах, в котором точка порождает при движении линию, а линия – плоскость. Появление этой книги побудило многих математиков различных стран заняться задачами, где применялись бесконечно малые. Среди этих математиков можно встретить Декарта, Ферма, Валлиса, Торричелли, Барроу.

Резюмируя вышесказанное, можно утверждать, что к концу XVI века европейские математики полностью овладели теми математическими знаниями, которые им достались от греков, арабов и индийцев. Европейцы, в отличие от арабов и индийцев, значительное внимание уделяли геометрии, ибо достаточно быстро овладели искусством дедуктивного математического доказательства (сказалось влияние схоластики). Но здесь в рассматриваемый нами период европейцам не удалось получить существенных результатов, превосходящих достижения греческой геометрии. Зато в области алгебры и арифметики они быстро догнали и перегнали не только греков, но и арабов и индийцев, и с этого времени и до настоящего все основные достижения в математике принадлежат западной цивилизации. Конец рассматриваемого периода характеризуется тем, что интеллектуальный уровень европейской математики полностью достиг уровня греческой математики. Теперь осталось немного времени до того, когда уровень развития европейской математики превзойдет греков.

В конце XVI – начале XVII вв. произошло событие, которое свидетельствовало уже о том, что европейцы начали выходить за рамки греческой науки. Этим событием было появление законов Кеплера и экспериментальных законов Галилея.

Выше мы уже упоминали, что единственной математической моделью, которая досталась в наследство от греков и которая широко использовалась для астрологических расчетов и составления календарей, являлась геоцентрическая модель Птолемея – Гиппарха. Однако эта теория не была математической моделью в современном смысле слова. Ее можно назвать математической моделью только потому, что она использовала геометрические объекты. По своей сути эта была наглядная схема движения небесных тел, с помощью которой можно было предсказать лунные затмения с точностью до одного-двух часов.

Вообще, астрономия была той областью знаний, которой большое внимание уделяли все древние человеческие цивилизации. Все эти цивилизации подходили к астрономии как к астрологии, ибо основное применение астрономических знаний было направлено на предсказание будущего в зависимости от расположения небесных светил. Эту же традицию и переняли греки. С появлением математики греки рассматривали ее как одну из математических наук, но совсем не в том смысле, как это может понять современный человек. В использование натуральных чисел или правильных тел греками в астрономии греки вкладывали чисто философский смысл. Одновременно с этим большой интерес вызывала у них астрология, которой они усердно занимались. И модель Птолемея и была построена для целей астрологии.

Исламских правителей также интересовала астрология, для чего они строили обсерватории и переводили греческие книги. Через арабов и европейцы познакомились с астрологией, которая завоевала большую популярность в Европе. Почти каждый правитель в Европе имел своего придворного астронома (астролога), обязанностью которого было составлять астрологические предсказания. В частности, этим занимались и Т. Браге и И. Кеплер.

Самым выдающимся событием в этом направлении в XVI веке было опубликование гелиоцентрической системы Н. Коперника. Отметим два свойства, связанные с этой системой. Как математическая модель система Коперника лежала полностью в русле греческой математики, ибо была построена на тех же математических идеях с помощью тех же математических средств, что и модель Птолемея—Гиппарха. Все математические упрощения по сравнению с этой моделью у Коперника носят чисто технический характер. Однако, во-первых, теория Коперника по физической природе принципиально отличалась от модели Птолемея – Гиппарха, ибо в центре модели Коперника было Солнце. Во-вторых, имевшиеся несоответствия с известными измерениями свидетельствовали, что эта теория была скорее гипотезой, нежели экспериментально проверенным фактом.

Только с появлением законов И. Кеплера гелиоцентрическая теория Коперника из гипотезы превратилась в экспериментально проверенную теорию. Достижения И. Кеплера, включающие три закона, которые были получены в первой трети XVII века, естественно завершают наши рассмотрения первого периода развития математики. Они интересны тем, что это были первые математические результаты, которые уже не могли получить греки, ибо эти законы были первыми сформулированными математическими моделями в современном смысле слова. Тем не менее, законы Кеплера еще следуют греческой традиции, ибо, по мнению Кеплера, господь бог, создавая Вселенную, руководствовался математическими принципами, или, другими словами, законы природы написаны на математическом языке. Законы Кеплера были тем, к чему стремились греки в своем стремлении познать Вселенную. Кроме того, и это указывает на гениальность Кеплера как математика, заключается в том, что формулировки законов, которые являются нетривиальными математическими утверждениями, никак не следуют из какого-либо практического или теоретического предшествующего опыта. Более того, у Кеплера не было предшественников, которые могли бы ему подсказать хоть что-то на пути формулирования этих утверждений. Только большой труд и поразительная научная самоотверженность, заключающаяся, в частности, в том, что он отвергал любую гипотезу, если она даже в малом не соответствовала наблюдениям. А. Эйнштейн писал:

> «Он ясно сознавал, что теоретические, логико-математические построения, безразлично насколько прозрачные, не могут сами по себе гарантировать истину, что самые логические теории не имеют ни малейшего значения в естественных науках без сравнения с тончайшим опытом».

В качестве примера его самоотверженности можно привести создание математического описания траектории движения планеты Марс. На это Кеплер потратил несколько лет.

Нужно обладать *очень* изощренным умом и *очень* богатой фантазией, чтобы сформулировать второй и третий законы. В этом смысле законы Кеплера являются блестящей иллюстрацией того, что прагматического познания недостаточно для развития науки. Следующая особенность этих законов заключается в том, что они являются экспериментально проверенными интеллектуальными утверждениями, полученными на основе метода проб и ошибок, хотя и модель Птолемея – Гиппарха также построена на основе наблюдений. Принципиальным отличием модели Кеплера являлось то, что он находил числовые параметры эллипсов – эта задача сама по себе очень сложная. Подобного примера мы также не встречаем у древних греков.

В силу вышесказанного, трудно согласиться со следующими словами Б. Рассела:

«Кеплер (1571 – 1630) является одним из выдающихся примеров того, чего можно достигнуть, не будучи гением, при помощи терпения» (Б. Рассел, 52, с. 549).

Однако самое удивительное заключается в том, что все эти три закона, которые казались независимыми друг от друга и такими разными по своей сути, вдруг оказались следствиями теории Ньютона. (Слово «вдруг» скорее относится к самому факту возможного получения этих законов как следствий теории. Но здесь необходимо отметить, что само построение теории Ньютона с самого начала было нацелено на то, чтобы получить законы Кеплера как следствия из этой теории.)

Глава 5. Греческий период развития математики: уроки и выводы.

5.1. Теория познания и греческая математика.

Греческая интеллектуальная революция вызвала к жизни новый тип интеллектуального познания. Как мы уже неоднократно отмечали, различные человеческие цивилизации наряду с прагматическим познанием создавали интеллектуальные, которые были связаны с религиями или мистическими учениями. (Для удобства рассмотрения мы будем считать, что различные религии и мистические учения относятся к разным типам познания.)

Создание религий или мистических учений как видов интеллектуального познания непосредственно связано с двойственной природой человеческого существования, которое одновременно протекает как в реальном мире, так и в сознании человека. Если прагматическое познание обеспечивало человеку возможность приспособиться к условиям жизни в реальном (внешнем) мире, то интеллектуальное познание позволяло ему упорядочить свой внутренний мир. В частности, одним из видов прагматического познания, который существует во всякой достаточно развитой человеческой цивилизации, в чьих рамках решаются количественные практические задачи, является *прематематика*.

В любой человеческой цивилизации всегда присутствует хотя бы одно прагматическое познание и одно интеллектуальное познание.

Разные народы и разные цивилизации обладали различными видами познания, ибо эти виды существенно зависели от естественных и социальных условий существования цивилизаций. С изменением этих условий изменялись и виды познания. Однако все дошедшие до нас виды интеллектуального познания, которые существовали у разных народов, были тем или иным способом связаны или с религией, или с мистическими учениями. Исключение составляет только триада, созданная греческой цивилизацией в результате интеллектуальной революции и состоящая из философии, математики и физики.

Указанная триада была чисто интеллектуальным продуктом, никак не связанным ни с религией, ни с мистическими учениями. Здесь ни в какой форме не фигурировали ни боги, ни духи, ни ничего похожего на них. Такое интеллектуальное познание принято называть *рациональным*. Несмотря на то, что в греческой цивилизации из этой тройки главенствующую роль играла философия, относительно которой физика и математика были как бы младшими партнерами, все же основным достижением греческого интеллекта, сыгравшим основную роль в дальнейшем развитии всей человеческой цивилизации, является создание математики.

Создание греческой интеллектуальной троицы не было вызвано никакими практическими нуждами. Трудно привести рациональные причины, которые повлекли за собой ее возникновение. Ни одна известная человеческая цивилизация не создала ничего и близко подобного этим интеллектуальным достижениям.

В то время, когда создавалась греческая философия, одновременно возникли философии и в Индии и Китае. Но эти философии имели, по сути, только местное влияние в Азии, не затронув Европы и Ближнего Востока. Более того, современное состояние философии показывает, что в ее развитии мы можем найти идеи именно греческой философии, хотя и в достаточно размытом виде.

Греческая физика в современном интеллектуальном развитии человечества имеет только историческое значение. В современных учебниках физики мы можем встретить ее упоминание только в исторических ссылках: ни одна ее идея не нашла применения в наше время. Однако с идей греческой физики и начала свое развитие современная физика. (Здесь мы отличаем греческую физику от греческой префизики, которая была частью пренауки.)

Только греческая математика заслужила, чтобы то, что она создала две с половиной тысячи лет тому назад и что было названо геометрией, почти без изменения изучали во всех школах мира. Самое интересное и удивительное заключается в том, что все те геометрические знания, которые получают школьники во время обучения, за очень редким исключением никогда не применяются в их дальнейшей жизни. Это означает, что геометрию изучают не для получения конкретных знаний, а для того, чтобы овладеть греческим способом мышления, основанным на дедукции. Греческий способ мышления – это то «зерно», из которого выросло все технологическое развитие современного мира. Именно на этом мышлении и основан новый тип интеллектуального познания, который при дальнейшем развитии привел к созданию того, что сегодня часто называют математическим познанием.

Прежде чем перейти к обсуждению греческой математики, необходимо, по всей вероятности, ответить на естественный вопрос: зачем грекам надо было тратить такие значительные интеллектуальные усилия для занятий математикой? Для современного человека этот вопрос кажется бессмысленным, ибо все вокруг него убеждены без всякой доли сомнения, что весь технологический прогресс человечества непосредственно связан с развитием математики. Но для эллина, жившего два с половиной тысячелетия тому назад, это было не столь очевидно. Мне кажется, что для этого эллина поставленный вопрос был сопоставим с целым множеством вопросов типа: зачем писать музыку? зачем участвовать в спортивных состязаниях? зачем заниматься искусствами? и т.п. На эти вопросы не существует рационального ответа, ибо перечисленные выше занятия (и другие, не перечисленные здесь) вытекают из сути человеческого существования.

Из предыдущих глав следует, что греческая математика состояла из трех дисциплин: греческой геометрии, греческой теории чисел и греческой арифметики. Эти три математические дисциплины отличаются между собой не только объектами познания, но и методами исследования. Поэтому они принадлежат к различным видам интеллектуального познания.

С точки зрения теории познания греческая геометрия представляет собой вид интеллектуального познания, который мы будем называть *теоретической математикой*. *Объектами* этой теоретической математики являются геометрические фигуры, которые представляют собой наблюдаемые интеллектуальные объекты. Наблюдаемые интеллектуальные объекты, с одной стороны, существуют только в человеческом сознании, а с другой – их можно интерпретировать с помощью реальных объектов, например, с помощью чертежей.

Рассматриваемые геометрические объекты распадаются на два класса: первичные геометрические объекты и вторичные геометрические объекты. Первичными геометрическими объектами являются точки, прямые, плоскости. Вторичные геометрические объекты определяются через первичные объекты.

Знаниями в теоретической математике являются «истинные» интеллектуальные утверждения. Все «истинные» интеллектуальные утверждения разделяются на два класса: *первичные* (априорные) «истинные» интеллектуальные утверждения и *вторичные* (доказуемые) «истинные» интеллектуальные утверждения.

Первичные «истинные» интеллектуальные утверждения – это утверждения, которые определенная человеческая общность признает априорными истинами или соглашается считать их базисными истинными утверждениями. Первичные утверждения обычно называют *аксиомами*. Набор всех первичных «истинных» утверждений называется набором аксиом. Предполагается, что в геометрии существует (определяется) только конечное число аксиом, т.е. набор аксиом является конечным множеством.

Вторичные «истинные» утверждения – это утверждения, которые выводятся из аксиом с помощью определенных интеллектуальных рассуждений, присущих рассматриваемому типу интеллектуального познания. Интеллектуальные рассуждения представляют собой *процедуру*, подчиняющуюся определенному набору правил. Вторичные «истинные» утверждения принято называть *теоремами*. Множество теорем, в общем случае, может быть неограниченным множеством.

Важно отметить, что любое геометрическое утверждение (теорему) можно проиллюстрировать с помощью чертежа. Поэтому, с одной стороны, любая геометрическая теорема обладает реальной интерпретацией, а с другой стороны, как интеллектуальное утверждение существует в сознании человека.

Набор всех «истинных» интеллектуальных утверждений, состоящий из первичных и вторичных утверждений, называется *аксиоматической теорией*. В аксиоматической теории любое «истинное» утверждение носит «абсолютный» характер. Это означает, что если «истинность» утверждения доказана, то нет такой ситуации, когда это утверждение может быть «ложным».

Процедура, с помощью которой из аксиом выводится теорема, называется *доказательством теоремы*. Набор правил, которым подчиняется процедура доказательства теоремы, называется *логикой*. Логика, которая используется в греческой геометрии, состоит из правил двух типов. Правила первого типа Аристотель назвал *силлогизмами*, а правила второго типа – *логическими законами*. Аристотель предложил два логических закона: *закон противоречия* (никакое утверждение не может быть одновременно истинным и ложным) и *закон исключенного третьего* (любое высказывание должно быть либо истинным, либо ложным).

Логика, которую мы только что описали, называется *дедуктивной логикой*. Если в теории используется дедуктивная логика, то эта теория называется *дедуктивной*. В частности, если в аксиоматической теории используется дедуктивная логика, то такую теорию будем называть *дедуктивной аксиоматической теорией*. Ниже дедуктивную аксиоматическую теорию мы будем называть *дисциплиной – теоретической математикой*.

Таким образом, греческая геометрия представляет собой один из видов интеллектуального познания, которое изучает наблюдаемые интеллектуальные объекты. Рассуждения в этом виде познания проводятся с помощью дедуктивной логики на основе конечного числа аксиом. Другими словами, греческая геометрия представляет собой дедуктивную аксиоматическую теорию, т.е. является представителем теоретической математики.

Однако греки при доказательстве теорем допускали два типа движения: перенос и вращение. Свойства этих операций никак не были связаны с геометрическими аксиомами, устанавливающими связи между геометрическими объектами. Наличие движения определяло дополнительные свойства геометрического пространства и геометрических объектов. В частности, в геометрии появляется непрерывность и однородность. Понятие непрерывности у греков со времен Зенона вызывало головную боль. Многие греческие философы, в том числе и Платон, и Аристотель, пытались охарактеризовать это понятие. Аналогичные попытки можно встретить и у средневековых ученых. Основным направлением в подобных исследованиях было рассмотрение движения как физического явления, но и на этом пути встречались немалые трудности.

Отсюда следует одно из самых важных утверждений, оказывающее принципиальное влияние на всю математику: геометрические величины, о которых говорит Евклид, являются непрерывными. С ними можно производить значительное число математических операций, получая в результате геометрические величины. Среди этих операций мы найдем и деление величин, и то, что позже было названо извлечением корней. Подводя итог, можно сказать, что геометрия представляет собой один из видов «непрерывной математики».

Теперь рассмотрим греческую теорию чисел с позиции теории познания. Объектами исследования в этом случае являются *натуральные числа*. Натуральные числа – это чисто интеллектуальные объекты, которые в греческую эпоху не могли быть интерпретированы с помощью реальных объектов. Другими словами, с точки зрения теории познания натуральные числа принципиально отличаются от геометрических объектов.

Для иллюстрации заметим, что любой геометрический объект, исследуемый в греческой геометрии, можно изобразить с достаточной ясностью на чертеже, в то время как трудно придумать наглядное представление совершенных или простых чисел, которые являлись важными объектами исследования в теории чисел. Это означает, что степень абстракции натуральных чисел гораздо выше степени абстракции геометрических фигур, на что указывал Платон, и они являются ненаблюдаемыми интеллектуальными объектами. Отсюда следует, что греческая теория чисел является чисто интеллектуальным познанием.

«Истинными» утверждениями в греческой теории чисел прежде всего являются *определения*. Определением называют утверждение, которое устанавливает связь между одним понятием или объектом (этот объект называется определяемым понятием или объектом) и набором других понятий и объектов. С помощью определений вводятся такие понятия, как делитель, четные и нечетные числа, простые числа и т.д. Кроме того, к «истинным» утверждениям относятся и утверждения, которые выводятся из определений и других «истинных» утверждений с помощью силлогизмов и логических законов.

Так как здесь мы не встречаем априорных «истинных» утверждений, аналогичных геометрическим аксиомам, то и вся эта теория в греческой теории чисел выглядит достаточно примитивной по сравнению с геометрией. Более того, к тому разделу теории чисел, который был изложен в «Началах», более поздние математики мало что добавили.

Так как множество всех натуральных чисел является дискретным множеством, то греческая теория чисел представляет собой один из видов дискретной математики. Поэтому нельзя установить взаимооднозначного соответствия между геометрическими величинами и натуральными числами. Из этого замечания вытекает, что существуют такие отношения между геометрическими величинами, которые нельзя описать, например, парой натуральных чисел. В качестве примера можно привести отношение стороны квадрата к его диагонали. Как известно со времен Пифагора, эти две геометрические величины не являются соизмеримыми, т.е. мы не можем с этим соотношением однозначно сопоставить пару натуральных чисел.

Из сказанного вытекает, что греческая теория чисел представляет собой вид интеллектуального познания, объектами которого являются чисто интеллектуальные объекты, а рассуждения проводятся на основе дедуктивной логики. В силу того, что все аксиомы этой теории представляют собой определения, мы будем называть эту область знаний *полуматематикой*.

И, наконец, греческая арифметика, которая возникла на закате греческой цивилизации и которую обычно связывают с Диофантом, также представляет собой тип полуматематики. Греческая арифметика в момент своего рождения представляла собой набор задач, целью которых было нахождение одного числа или набора чисел, удовлетворяющих определенным условиям. Эти условия в рамках современной исторической литературы представляются в виде уравнения или системы уравнений. Понятие уравнения — это достижение конца греческого периода, которое принадлежит уже европейцам.

Необходимо отметить, что значительное число арифметических задач очень напоминали прематематические. Принципиальным их отличием являлся тип объектов, в рамках которых ищется решение задачи. Напомним, что в решении прематематических задач используются прематематические именованные числа.

Объектами греческой арифметики являются объекты, которые также называли числами, но совершенно другой природы, нежели натуральные или прематематические. Эти числа имели совершенно различное значение. В частности, Диофант использовал числа в двух качествах. Во-первых, это числа, представляющие собой запись из символов, использующихся при написании натуральных чисел. Такие числа, чтобы отличить их от натуральных, будем называть целыми алгебраическими числами (или прагматическими числами). Во-вторых, это числа, для которых употреблялась специальная запись, и которые сегодня принято называть дробями.

Позже индийцы и арабы вводили в рассмотрение дополнительные виды чисел, которые обозначались специфическими записями. Все используемые в арифметике числа являются чисто абстрактными объектами. По аналогии на множествах этих чисел вводились арифметические операции.

«Истинным» утверждением в арифметике служили утверждения типа «это число является решением задачи», или «эти числа являются решением задачи». Проверка утверждения на «истинность» была простой: подставив решение в условия задачи, проверяем выполнение всех условий задачи.

Метод получения «истинных» утверждений в арифметике был подобен методу решения прематематических задач, т.е. он был индуктивный, дающий инструкцию решения конкретной задачи.

5.2. Общий взгляд на развитие математики в ретроспективе.

Возникшая в VI веке до н.э. в древней Греции в результате интеллектуальной революции греческая математика, по существу, завершила свое развитие в Западной Европе в начале XVII века. Последнее утверждение ни в коем случае не означает, что греческая математика прекратила свое существование. Греческая математика продолжала существовать отдельно в тени новой математики, которая возникла в XVII веке, хотя для решения части своих задач она стала использовать методы новой математики. Ярким примером этому утверждению служит современное изучение греческой геометрии в общеобразовательных школах. Да и появление, гораздо позже, таких геометрий, как проективная геометрия, также свидетельствует о том, что греческая математика продолжала и продолжает существовать и поныне.

Выше мы уже обсуждали вопрос о месте и причинах рождения математики. Единственный рациональный ответ на этот вопрос заключается в том, что не существует никаких объективных причин для возникновения математики, ибо не было вызвано никакими естественными потребностями человеческой цивилизации.

Произошло случайное, но счастливое стечение обстоятельств, связанное с появлением такой личности, как Пифагор, который, во-первых, создал некий достаточно устойчивый религиозный культ, основанный на математике и просуществовавший несколько веков, и, во-вторых, сплотивший вокруг себя достаточно широкий круг людей, способный в дальнейшем освоить и развить математику. Именно благодаря его ученикам и последователям математика превратилась в особый род интеллектуального искусства, занятия которым были привиты и распространены в определенных кругах греческого общества в рамках общей греческой культуры.

В любой человеческой цивилизации ее экономическая и социальная жизнь непрерывно требует решения количественных практических задач. Без решения этих задач невозможно существование цивилизации. Сохранившиеся документы материальной культуры различных человеческих цивилизаций, даже прекративших свое существование, свидетельствуют это.

Вот этот набор методик решения количественных практических задач мы и назвали *прематематикой*. Из сказанного следует, что прематематика существовала, а в некоторых цивилизациях существует и до сих пор без всякой связи с математикой.

Поэтому один из принципиальных вопросов, который возникает перед любым историком математики, состоит в том, является ли прематематика предтечей математики, или, другими словами, можно ли утверждать, что корни математики лежат в прематематике. Несмотря на то, что общепринятая точка зрения заключается в том, что греческая математика своим рождением обязана египетской и вавилонской прематематике, мы все же отрицаем это утверждение. Ниже мы попытаемся обосновать наше убеждение на основе сравнения природы объектов исследования математики и прематематики. Здесь же мы повторим косвенный довод, приведенный выше. Этот довод заключается в том, что во всей известной нам истории человечества нет ни одного другого примера человеческой цивилизации, кроме греческой, которая бы создала что-либо похожее на греческую математику.

В древней Греции математика выжила и продолжала развиваться благодаря, во-первых, тому, что она стала частью греческой философии и вместе с тем частью греческой культуры; во-вторых, благодаря греческим школам, которые были центрами развития греческой культуры; и в-третьих, благодаря софистам, которые обучали математическим знаниям и распространяли их. Роль греческих школ трудно переоценить в истории выживания и развития греческой математики, ибо трудно представить себе существование и развитие математики без необходимого непрерывного человеческого общения, а также наличия библиотек, содержащих соответствующую литературу.

Создание греческой математики потребовало принципиально новой формы мышления, неизвестной до этих пор и основанной на дедукции. Эта форма мышления могла родиться и существовать только в результате непрерывного и длительного обучения, для чего необходимы либо школы, либо профессиональные учителя. Она оказалась специфической греческой формой мышления, которой на протяжении почти двух тысяч лет *не смог овладеть ни один другой народ*.

Распространение математики за пределы Эллады произошло впервые во времена походов Александра Македонского, который создавал центры греческой культуры во всех завоеванных странах. Римская империя и другие государства, возникшие на развалинах империи Александра, поддерживали их существование. Только благодаря существованию этих центров вне пределов Римской империи удалось сохранить и передать другим народам созданные греками интеллектуальные сокровища.

После падения Римской империи математика сначала получила прибежище в Индии, а затем, во времена господства ислама, вернулась в Месопотамию и в Испанию. Новые обладатели греческих математических сокровищ не внесли никакого нового важного вклада в геометрию. Более того, интересно отметить, что ни один народ не выдвинул ни одного крупного математика, который использовал бы геометрическую алгебру в своих полуматематических исследованиях, т.е. который пользовался бы математическим доказательством для своих исследований. Один из факторов, которым можно, в частности, объяснить последнее утверждение, заключается в том, что ни в Индии, ни в арабских странах после уничтожения греческих школ не существовало подобных заведений, где бы систематически обучали математике.

После распада и уничтожения Западной Римской империи в V веке математика исчезла с ее территории вместе со многими явлениями греческой культуры. Математика вновь появилась в Западной Европе только в XII – XIII веках, когда стали распространяться переводы математических книг с арабского языка на латынь. В частности, ознакомлению с математикой способствовал перевод «Начал» Евклида. С этих пор математику стали изучать в монастырях и в университетах, которые, по своей сути, в средние века выполняли в математике ту же роль, что и греческие школы. Культурные европейцы стали не только знакомиться с греческой математикой, но и пытаться решать математические задачи. С этого момента Западная Европа стала основной областью дальнейшего развития математики.

Знакомство с греческой математикой шло практически параллельно с внедрением логики Аристотеля в западноевропейскую христианскую теологию, чему содействовали схоласты. Использование логики в теологических исследованиях позволило европейцам с течением времени усвоить и овладеть греческим способом мышления. К концу XVI – к началу XVII века европейские математики полностью овладели всеми теми математическими знаниями, которые содержались в доставшейся им греческой и арабской математической литературе. Именно европейцы первыми после греков стали доказывать новые геометрические теоремы, т.е. европейцы овладели дедукцией.

Математика при своем рождении состояла из двух частей: геометрии (которую еще несколько веков после этого считали истинной математикой) и теории чисел. Геометрия являет собой тип познания, объекты исследования которого – геометрическое пространство, геометрические фигуры и тела – имеют достаточно наглядный вид, хотя они представляют собой геометрические формы. Геометрические формы являются абстрактными наглядными объектами. Кроме того, геометрия в силу своей наглядности была непрерывной математикой. Это означает, что все геометрические фигуры и тела (за исключением точки) можно было делить на части. Значительное большинство своих задач геометрия черпала из этой наглядности.

С другой стороны, основными объектами теории чисел были так называемые натуральные числа. Это были чисто абстрактные объекты, которым приписывался мистический смысл. Более того, среди натуральных чисел более двух тысяч лет нельзя было встретить единицу. По своей природе числа были *неделимыми* объектами. Делители натуральных чисел не являлись частями делимого. Таким образом, теория чисел являлась представителем дискретной математики. Степень ее абстракции была гораздо выше, чем степень абстрактности геометрии.

Сравним между собой прематематические объекты и математические объекты.

В прематематике мы встречаем два типа объектов: прематематические числа и реальные объекты, имеющие определенную геометрическую форму. Ясно, что реальные объекты, хотя они имеют определенную геометрическую форму, по своей сути отличаются от геометрических объектов, являющихся абстрактными и существующими только в сознании человека. Прематематические числа, с которыми мы встречаемся при решении задач, представляют собой определенные количества (и в этом случае они являются именованными числами) или доли от количества (тогда они часто имеют вид специальных символов). В любом случае, прематематические числа тем или иным способом связаны с количеством. Натуральные числа представляют собой некие символы, с которыми можно обращаться по определенным правилам. Образно говоря, натуральные числа представляют собой «игрушки», с которыми «участвуют в игре» по определенным правилам. Уже из этого утрированного описания видны принципиальные отличия между прематематическими и математическими числами.

И наконец, укажем еще одно принципиальное отличие – уже между математикой и прематематикой. Если целью любой практической задачи является проведение вычислений, то целью математической задачи является доказательство утверждения.

Исходя из сказанного, можно сделать вывод: нет никакого основания утверждать, что корни математики лежат в прематематике. Отметим, что в то время, когда создавалась математика, и позже, в древней Греции уже существовала прематематика, которая называлась логистикой.

С возвращением греческой науки в Европу связан принципиальный вопрос. Как удалось европейцам включить значительную область языческой древнегреческой культуры, частично дополненной мусульманами, в католическую культуру, которая господствовала в Западной Европе? Необходимо помнить, что несколько веков назад до этого католическая церковь с большим энтузиазмом уничтожала следы греческой культуры.

Прежде чем ответить на этот вопрос, необходимо подчеркнуть, что те знания, которые европейцы переняли у мусульман, состояли из двух частей: практические знания (прематематика, медицина, астрология, география, алхимия, архитектура и т.п.) и теоретические знания (философия, математика, физика). В развивающейся Европе практические знания, накопленные мусульманами, всеми были встречены с большой радостью. Поэтому наш вопрос относится только к чисто теоретическим знаниям.

Существуют несколько различных причин того, что католическая церковь не только не препятствовала проникновению греческой культуры, но даже способствовала этому. Во-первых, к XI – XII вв. католическая церковь настолько утвердилась как в духовной, так и в светской сфере в Европе, что она не боялась никакой конкуренции в интеллектуальной области. Более того, католическая церковь стала строить свои соборы, которые по своей грандиозности не уступали античным зданиям. Во-вторых, базис греческого научного мировоззрения лежал в греческой философии, которая опиралась на два столпа: Платона и Аристотеля.

Идеи Платона для католической теологии были не новы: в ее основе лежали идеи неоплатоников, в частности, Плотина. Поэтому возвращение греческой философии на европейскую почву свелось к замене влияния Платона на влияние Аристотеля. Так как в это время происходит интенсивное экономическое и хозяйственное развитие Европы, то философский подход Аристотеля, основанный на опыте, стал более необходим, нежели мир Платона, основанный на идеях. В-третьих, у Аристотеля было то, чего не было у Платона: дедуктивная логика. Дедуктивная логика оказалась тем инструментом, который был необходим католической теологии, а особенно католическим теологам, ибо она стала широко использоваться при проведении диспутов.

Таким образом, противоречия между античной наукой и католической теологией могли появиться лишь в области космологической теории, связанной с возникновением мира.

Но и здесь довольно быстро была найдена формула, согласно которой античные знания вписывались в католическую действительность. Эта формула заключалась в том, что была изменена цель изучения природы: ею стал поиск и изучение законов, на основе которых Бог построил окружающий мир. Такое изменение никак не оказало влияния на содержание греческой науки, в том числе и математики, но, однако, позволило европейским ученым изучать и развивать греческую науку без вмешательства католической и протестантской церквей.

Подведем итоги развития математики и прематематики в Европе до XVII в.

Прематематика в Европе носила разные названия. В средние века ее обычно называли техникой счета. Затем можно встретить термин «практическая арифметика», «арифметика». Она никаким способом не была связана с математикой до XVII в. Высказанное утверждение можно обосновать следующим образом.

Овладение знаниями, связанными с проведением вычислений, требовало больших интеллектуальных усилий. Поэтому круг людей, которые могли вычислять, был в то время относительно ограниченным. Туда входили торговцы, люди, занятые в финансовой сфере, инженеры и т.п. Но потребности экономики, хозяйственной жизни заставляли найти способы заставить многих людей овладеть процессом вычислений. Для этого были организованы специальные школы для обучения счету.

Так как греческая математика, даже с дополнениями арабов, не была связана с практикой, то круг занимающихся ею был гораздо более ограничен. В основном в этот круг входили люди, которые были связаны с университетами или с преподаванием математики и прематематики, или люди свободных профессий, обладающие определенным интеллектуальным любопытством и свободным временем. Обучение математике требовало гораздо более высоких интеллектуальных усилий, нежели обучение прематематике, что резко снижало количество людей, знакомых с математикой.

В заключение этого параграфа остановимся на развитии основных математических понятий. Понятие геометрической фигуры (тела) не изменилось со времен Евклида. В понимании сути математических чисел со времен греков многое изменилось. На этом пути основные до XVII в. крупные достижения принадлежат арабским математикам: они попытались сблизить между собой два понятия, одно из которых есть несоизмеримость геометрических величин, а другое – числовые иррациональные величины, представляемые выражениями, содержащими радикалы. Если первые — являются объектами исследования геометрии, то вторые – объектами исследования алгебры. Арабские математики также впервые стали рассматривать иррациональные числа как последовательность известных рациональных чисел.

Европейцы, ознакомившись с достижениями греков и арабов, спустя пару веков существенно продвинули вперед исследования с той точки, на которой остановились арабы. Они же, кроме различных иррациональностей, стали использовать и комплексные числа.

Дальнейшее развитие математики в рамках греческой науки было замедлено, потому что ни геометрия, ни алгебра не ставили таких задач, которые могли быть «решаемыми». Математики были вынуждены оглядываться вокруг в поисках новых математических объектов или понятий, которые смогли им обеспечить «поле» для исследований.

К счастью, на пороге стоял XVII в., и развитие небесной механики и механических технологий выдвинули значительное число задач, решение которых требовало новых идей, новой методологии.

Часть 3. Европейская математика.

Быть может, потомство будет признательно мне за то, что я показал ему, что Древние знали не всё.

П. Ферма

Глава 6. Развитие математики в XVII веке.

Почти все, чем отличается новый мир от более ранних веков, обусловлено наукой, которая достигла своих наиболее поразительных успехов в XVII веке… Новый мир, насколько это касается духовных ценностей, начинается с XVII века. Нет такого итальянца эпохи Возрождения, которого не поняли бы Платон или Аристотель; Лютер привел бы в ужас Фому Аквинского, но последнему было бы нетрудно понять его. С XVII века дело обстоит иначе: Платон и Аристотель, Фома Аквинский и Оккам не смогли бы понять Ньютона.

Б. Рассел

Здравомыслие есть вещь, справедливее всего распространенная в мире: каждый считает себя настолько им наделенным, что даже те, кого всего труднее удовлетворить в каком-либо другом отношении, обыкновенно не стремятся иметь здравого смысла больше, чем у них есть. При этом невероятно, чтобы все заблуждались. Это свидетельствует скорее, что способность правильно рассуждать и отличать истину от заблуждения — что собственно и составляет, как принято выражаться, здравомыслие или разум, — от природы одинакова у всех людей. А также о том, что различие наших мнений происходит не оттого, что один разумнее другого, а только оттого, что мы направляем наши мысли различными путями и рассматриваем не одни и те же предметы. Ибо недостаточно только иметь хороший разум, но главное — это хорошо применять его.

Р. Декарт

6.1. Философия и математика. Р. Декарт и Ф. Бэкон.

XVII век сыграл выдающуюся роль в истории математики. В течение этого века в математике произошли события, которые оказали решающее влияние на все дальнейшее ее развитие. Этот век по своим достижениям в математике можно сравнить с первыми тремя веками, в течение которых рождалась и оформлялась *греческая математика*. Закончился длительный процесс совершенствования символической алгебры (Виет, Декарт), возродилась теория чисел (Ферма), возникли первые ростки теории вероятностей (Паскаль, Ферма), была создана аналитическая геометрия (Декарт, Ферма), математический анализ (Лейбниц, Ньютон). В XVII веке родилась *европейская математика*, состоящая из *европейской теоретической математики*, в основе которой лежал математический анализ, и *европейской прагматической математики*, в основе которой лежали различные методики проведения вычислений, основанные на применении формул.

К началу XVII века европейцы не только ознакомились с греческой культурой и наукой, но вдруг обнаружили, что греческие рамки для них стали тесными. Прежде всего это стало ощущаться в философии: в метафизике и в теории познания. Именно отсутствие соответствующе развитой метафизики до XVII века было одной из причин, которые сдерживали развитие европейской науки, заставляя ее находиться в рамках греческой науки.

В начале семнадцатого столетия появились сразу две философские школы, два направления в философии, которые оказали большое влияние на ее последующее развитие. Одно из этих направлений во главу угла ставило интеллектуальное познание, а другое – прагматическое познание.

Первое направление создал великий французский философ и ученый Р. Декарт, который своей философией в определенном смысле подвел итог развития католической философской мысли того времени. Его философия имеет огромное значение для европейской науки, поскольку именно она оказала решающее влияние на формирование самого стиля мышления, характерного для XVII и XVIII веков, и на таких гигантов, как Ньютон и Лейбниц. Теория познания в философии Декарта хотя и имела греческие корни, но принципиально отличалась от теории познания греческой философии.

Мы не будем в рамках настоящей книги обсуждать основные положения философии Декарта, а только дадим вкратце описание места математики в его теории познания. Он считал, что математика – самая достоверная из всех наук, и только на ее основе может быть получено достоверное знание о природе. В «Метафизических рассуждениях» Декарт писал:

«Я считаю наиболее достоверными те истины, которые ясно воспринимал как относящиеся к фигурам, числам и другим материям, принадлежащим арифметике, геометрии и вообще чистой и абстрактной математике... Только математикам дано достичь несомненности и ясности, ибо они исходят из того, что наиболее легко и просто».

С Декартом перекликается и Галилей:

«Философия природы написана в величайшей книге, которая всегда открыта перед нашими глазами, – я разумею Вселенную, но понять её сможет лишь тот, кто сначала выучит язык и постигнет письмена, которыми она начертана. А написана эта книга на языке математики, и письмена ее – треугольники, окружности и другие геометрические фигуры, без коих нельзя понять по-человечески её слова: без них тщетное кружение в темном лабиринте» (Г. Галилей, 19).

Декарт определял природу как протяженную субстанцию. Главное определение природных тел – это их протяженность в длину, ширину и глубину. Более того, он рассматривал природу как грандиозную машину (механизм), изучением которой занимается механика, а основными ее понятиями являются протяженность, фигура и движение. Декарт превратил механику в отрасль математики, жестко связав движение с протяжением как атрибутом материальной субстанции. Именно это его достижение сыграло выдающуюся роль в развитии всей современной физики, в центре которой лежит соединение пространства с движением. Правда, способы и суть этого соединения менялись в зависимости от развития физики.

Стало быть, та наука, которая имеет своим предметом протяженность, а именно геометрия, которая, согласно Декарту, и является такой наукой, должна стать основой всех наук о природе. Учитывая, что телам присуща и фигура, а изучение фигур – тоже дело геометрии, ясно, что эта наука должна стать универсальным инструментом изучения природы. Более того, все свойства физического пространства должны выводиться из первых принципов геометрии. По словам Декарта, он «не приемлет и не надеется найти в физике каких-либо принципов, отличных от тех, которые существуют в Геометрии или в Абстрактной Математике, потому, что они позволяют объяснить все явления природы и привести доказательства, не оставляющие сомнения».

Но для достижения данных целей эту науку необходимо преобразовать так, чтобы с ее помощью можно было изучать движение, чего не делала античная геометрия. Тогда она предстанет в виде универсальной математики, или того, что Декарт называл «методом». Таким образом, философия Декарта приводила к выводу, сходному с тем, к которому пришли платоники, но исходя из других соображений. И платоники, верившие в авторитет, и картезианцы, верившие в разум, считали математику царицей наук.

Для изучения физического мира Декарт хотел использовать только математику, ибо, по его собственному признанию в книге «Рассуждение о методе», «из всех, кто когда-то занимался поиском истины в науках, только математикам удалось получить некоторые доказательства, т.е. указать причины, очевидные и достоверные». По его мнению, одной лишь математики было бы достаточно для изучения физического мира.

«Я прямо заявляю, что мне неизвестна иная материя телесных вещей, как только всячески делимая, могущая иметь фигуру и движения, иначе говоря, только та, которую геометры обозначают названием величины и принимают за объект своих доказательств; я ничего в этой материи не рассматриваю, кроме ее делений, фигур и движения, и, наконец, ничего не сочту достоверным относительно нее, что не будет выведено с очевидностью, присущей математическому доказательству. И так как этим путем, как обнаружится из последующего, могут быть объяснены все явления природы, то мне думается, не следует физике принимать других начал, кроме вышеизложенных, да и нет оснований желать их» (Р. Декарт, 24).

«К области математики относятся только те науки, в которых рассматривается либо порядок, либо мера, и совершенно несущественно, будут ли это числа, фигуры, звезды, звуки или что-нибудь другое, в чем отыскивается эта мера. Таким образом, должна существовать некая общая наука, объясняющая все относящееся к порядку и мере, не входя в исследование частных предметов, и эта наука должна называться не иностранным, но старым, уже вошедшим в употребление именем всеобщей математики, ибо она содержит в себе все то, благодаря чему другие науки называются частями математики. Насколько она превосходит своей легкостью и доступностью все эти подчиненные ей науки, видно из того, что она простирается на предметы всех этих наук, так же как и многих других, и если она заключает в себе некоторые трудности, то такие же трудности содержатся и в последних, имеющих сверх того и другие…» (Р. Декарт, 24, с. 93-94).

В качестве всеобщей математики Декарт рассматривает алгебру, которая только одна в полной мере удовлетворяет требованию «не входить в изучение никаких частных предметов». Алгебра как математический язык также дает больше возможностей для построения условного мира, который мыслился Декартом как механизм, воспроизводящий те же следствия, которые наблюдаются в реальном мире. Поэтому он стремился увязать геометрию с алгеброй. В приложении к «Размышлению» Декарт (почти одновременно с П. Ферма) заложил основы новой математической дисциплины, которую сегодня называют *аналитической геометрией*.

Декарт считал аналитическую геометрию в большей мере приложением алгебры к геометрии. Сначала он старался применить алгебру как инструмент решения задач на построения, а затем у него появилась идея уравнения кривой, что и является одной из основных фундаментальных идей аналитической геометрии. Все основные идеи Декарт изложил в «Геометрии» (1637). Там можно выделить два направления. Одно посвящено алгебре, а другое – сочетанию алгебры с геометрией. Эта книга начинается с установления связи между «исчислением арифметики» и «построениями геометрии»:

«Все задачи геометрии можно легко привести к таким терминам, что для их построения нужно будет затем знать лишь длину некоторых прямых линий. …

Подобно тому, как вся арифметика состоит только из четырех или пяти действий, именно в сложении, вычитании, умножении, делении и извлечении корней, которое можно считать некоторого рода делением, подобно этому в геометрии, чтобы подготовить искомые линии к определению, нужно только прибавить к этим линиям или отнять от них другие; или же нужно, имея линию, которую я, дабы установить более тесную связь с числами, назову единицей и которая может быть выбрана произвольно, и имея еще две другие линии, найти четвертую линию, так относящуюся к одной из двух, как единица к другой, а это то же самое, что деление; или, наконец, найти одну, или же две, или несколько средних пропорциональных между единицей и какой-нибудь другой линией, а это то же самое, что извлечь квадратный или же кубический и т.д. корень» (Р. Декарт, 25, с. 301-302).

Все операции над отрезками приводят в исчислении Декарта к отрезкам. Любой отрезок, в его отношении к единичному, служит эквивалентом некоторого действительного числа. Само исчисление основано на том, что отрезки обозначаются буквами или цифрами, а операторы – обычными знаками арифметики и алгебры. Таким образом, устанавливается тесная связь между алгеброй и геометрией. В этом случае любое алгебраическое выражение можно рассматривать как отрезок, если выбран единичный отрезок. Суть этой связи четко выразил А.П. Юшкевич (25, с. 526):

«Отметим прежде всего, что переменные величины были введены Декартом - если не явно, то по существу — в двух проявлениях. С одной стороны, это отрезки переменной длины, текущие координатные отрезки точки, своим движением описывающие плоскую кривую. С другой стороны, это численные переменные, выражающие длины, а для ординат — и направления координатных отрезков. Такой двуликий геометрический и числовой образ переменных обуславливал взаимопроникновение геометрических и арифметико-алгебраических методов и ставшее в очередь дня применение алгебры к геометрии. Само понятие о числе, под которым ранее понималось положительно рациональное, Декарт — опять-таки, если и неявно, то фактически — распространил на всю область вещественных чисел: без этого немыслимо было аналитическое изучение непрерывных пространственных фигур, их взаимосвязей и движения. Тем самым Декарт порывал с восходившей к античности традицией, считавшей разнородными объекты арифметики и геометрии, дискретное число и непрерывную протяженную величину и придерживавшейся того правила, что нельзя переносить доказательства из одного рода в другой, например, доказательства арифметики — на величины, не являющиеся числами».

Свои основные алгебраические результаты Декарт изложил в третьей книге «Геометрии». Изложение Декарта, применившего новую, предложенную им символику (основанную на работах Виета, Гарриота, Жирара) и терминологию и сообщившего всем формулировкам максимальную простоту, стало отправным пунктом дальнейшего развития новой алгебры.

Здесь мы сталкиваемся с основной теоремой алгебры, которая формулируется в следующей форме:

«Всякое уравнение может иметь столько же различных корней, или же значений неизвестной величины, сколько последняя имеет измерений» (Р. Декарт, 25, с. 76).

Из других алгебраических достижений Декарта отметим «правило Декарта» для определения числа положительных и отрицательных корней по знакам коэффициентов уравнения. Это правило открыло путь целой серии работ в этом направлении.

Общим методом решения алгебраических уравнений служило их геометрическое построение. Поэтому одним из центральных моментов аналитической геометрии является существование уравнения кривой.

«Итак, желая решить какую-нибудь задачу, следует ее рассматривать как уже решенную и дать название всем линиям, которые представляются необходимыми для ее построения, притом неизвестным так же, как и известным. Затем, не проводя никакого различия между этими известными и неизвестными линиями, нужно обозреть трудность, следуя тому порядку, который показывает наиболее естественным образом, как они взаимно зависят друг от друга, до тех пор, пока не будет найдено средство выразить одну и ту же величину двояким способом: это то, что называется уравнением, ибо члены, полученные одним из этих двух способов, равны членам, полученным другим. И следует столько найти уравнений, сколько было предложено неизвестных линий».

Таким образом, алгебраическое уравнение стало соотношением между числами. Эти уравнения, пока что алгебраические, явились первой достаточно общей формой функциональных зависимостей и вместе с тем основой аналитического исследования алгебраических плоских кривых. Анализ (простейших) алгебраических функций в сочетании с координатами — таков был новый, открытый Декартом метод исследования количественных и пространственных взаимосвязей, а значит и проблем физики, механики, астрономии и т.д.

Это был еще один шаг вперед по пути математической абстракции, необходимой для общей трактовки алгебраических кривых, что можно рассматривать как окончательное принятие Западом алгоритмической алгебраической традиции Востока.

Создание аналитической геометрии положило начало алгебраизации математики, ибо с этого времени исследования в области геометрии стали проводиться на алгебраическом языке. Другими словами, если греки при построении математики свели алгебру к геометрии, то Декарт при своем построении математики начал процесс сведения геометрии к алгебре. Разработка аналитической геометрии, а также теории движения, привели к тому, что Декарт одним из первых стал неявно пользоваться понятием функции.

Второе направление европейской философской мысли возглавил Ф. Бэкон, заложивший основы эмпиризма, дальнейшее развитие которого также оказало существенное влияние на прогресс науки в XIX и XX веках. Это философское направление основывалось на прагматическом познании, целью которого являлось получение непосредственной пользы, что было характерным для протестантизма.

Подход Ф. Бэкона к математике двойственен. С позиций своего эмпиризма Ф. Бэкон, с одной стороны, выступал против чистой математики, считая занятия ею «тратой на всякие пустяки», что отводило математике в науке вспомогательную роль:

«…поскольку мы заботимся не только об истине и порядке изложения, но и пользе и выгоде для людей, представляется более правильным, имея в виду огромное значение математики и для физики, и для метафизики, и для механики, и для магии, отнести ее в приложения ко всем этим наукам и определить как вспомогательную дисциплину. Сделать это нас в какой-то мере побуждает и общеизвестное высокомерие и самодовольство математиков, стремящихся к тому, чтобы их наука фактически господствовала над физикой» (Ф. Бэкон, 1, т.1, с. 237).

С другой стороны, он поддерживал прикладную математику (называя ее смешанной), которая практически отличалась от чистой математики только постановками задач.

«К чистой математике принадлежат те дисциплины, которые рассматривают количество, полностью абстрагированное от материи и физических аксиом. Этих дисциплин две – геометрия и арифметика. Первая рассматривает непрерывное количество, а вторая – дискретное. Обе эти дисциплины потребовали для своего исследования и разработки большого таланта и усилий многих ученых; однако все последующие ученые не прибавили ничего в геометрии к трудам Евклида, что было бы достойно такого огромного промежутка времени, прошедшего с тех пор. … В арифметике еще не существует ни достаточно разнообразных, ни достаточно удобных способов совершения вычислений…» (Ф. Бэкон, 1, т.1, с. 237).

«Предметом смешанной математики являются некоторые аксиомы и части физики. Она рассматривает количество в той мере, в какой она помогает разъяснению, доказательству и приведению в действие законов физики. Ибо в природе существует много такого, что не может быть ни достаточно глубоко понято, ни достаточно убедительно доказано, ни достаточно умело и надежно использовано на практике без помощи и вмешательства математики. Это можно сказать о перспективе, музыке, астрономии, космографии, архитектуре, сооружении машин и некоторых других областях знаний. Впрочем, я не нахожу, чтобы в смешанной математике отсутствовал какой-нибудь раздел, но я могу предсказать, что в будущем, если только люди не предадутся праздности, таких разделов окажется очень много» (Ф. Бэкон, 1, с. 238).

Отметим, что окидывая взглядом время жизни Ф. Бэкона, трудно привести примеры физических аксиом, записанных на математическом языке и указывающих на ту область математики, которую можно отнести к смешанной математике. Правда, уже в то время появились физические экспериментальные законы, которые с определенной натяжкой и можно считать физическими аксиомами.

Ф. Бэкон сделал попытку построить научное познание на основе прагматического познания. Для получения истинных (достоверных) утверждений он предложил вместо дедукции использовать индукцию. Ф. Бэкон рассматривал индукцию не как средство прагматического познания, а как метод выработки фундаментальных теоретических понятий и аксиом естествознания, или, как он сам выражался, естественной философии. Другими словами, наука, по его мнению, должна оперировать только наблюдаемыми понятиями. В отличие от Декарта, который считал аксиомы (т.е. первичные истинные интеллектуальные утверждения) продуктом чистого разума, Ф. Бэкон считал, что аксиомы есть продукт опыта и индукции.

«Но и после того, как множество частностей будет должным образом как бы поставлено перед глазами, не следует тотчас переходить к исследованию и открытию новых частностей или практических приложений. … Однако от этого следует ожидать не столь многого, как от нового света аксиом, которые по известному способу и правилу выводятся из тех частностей и в свою очередь указывают и определяют новые частности. … Сначала восходят к аксиомам, а затем спускаются к практике» (Ф. Бэкон, 1, т. 2, с. 60).

«Не следует все же допускать, чтобы разум перескакивал от частностей к отдаленным и почти самым общим аксиомам (каковы так называемые начала наук и вещей) и по их непоколебимой истинности испытывал и устанавливал бы средние аксиомы. Так было до сих пор; разум склоняется к этому не только естественным побуждением, но и потому, что он уже давно приучен к этому доказательствами через силлогизм. Для наук же следует ожидать добра только тогда, когда мы будем исходить по истинной лестнице, по непрерывным, а не прерывающимся ступеням – от частностей к меньшим аксиомам и затем к средним, одна выше другой, и, наконец, к самым общим. Ибо самые низшие аксиомы немногим отличаются от голого опыта. Высшие же и самые общие аксиомы (какие у нас имеются) умозрительны и абстрактны, и в них нет ничего твердого. Средние же аксиомы истинны, тверды и жизненны, от них зависят человеческие дела и судьбы. А над ними, наконец, расположены наиболее общие аксиомы – не абстрактные, но правильно ограниченные этими средними аксиомами.

Поэтому человеческому разуму надо придать не крылья, а, скорее, свинец и тяжести, чтобы они сдерживали всякий раз его прыжок и полет. Но этого, однако, до сих пор не сделано. Когда же это будет сделано, то можно будет ожидать от наук лучшего» (Ф. Бэкон, 1, т. 2, с. 60-61).

Одним из важных достижений Ф. Бэкона и его вкладом в метаматематику является выделение и подчеркивание роли индукции для получения интеллектуальных выводов. Он был зачинателем систематизации процесса научной деятельности. Он пытался найти более лучший вид индукции, чем тот, что называется индукцией через простое перечисление. Бэкон предложил метод индукции, основанный на упорядочивании фактов по уровням иерархии (см. приведенную выше цитату) таким образом, чтобы закон, установленный на нижнем уровне, имел малую степень общности. С повышением уровня проверяемых фактов растет и уровень общности законов. Бэкон верил, что на этом пути можно получать общие законы. Однако не все разделяли его надежды.

«Индуктивный метод Бэкона ошибочен из-за того, что он недостаточно подчеркивал значение гипотез. Он надеялся, что простое упорядочивание фактов сделало бы правильные гипотезы очевидными, но это редко случается. Как правило, формирование гипотез – это наиболее трудная часть научной работы и та ее часть, где необходимы большие способности.

… Проблема индукции через простое перечисление остается нерешенной и по сей день. Бэкон был совершенно прав, отвергая простое перечисление, когда это касается деталей научных исследований, так как в отношении деталей мы можем допустить общие законы, на базе которых, поскольку они принимаются как имеющие силу, можно построить более или менее убедительный метод» (Б. Рассел, 1, с. 563-564).

Исследования в области индукции, интерес к которым возрос благодаря Бэкону, привели к тому, что через столетие появился метод математической индукции, который стал одним из самых распространенных в области математического доказательства. Он существенно разнообразил методы доказательства математических утверждений и сыграл большую роль в процессе логического обоснования основ математики.

Предназначение гения состоит в том, чтобы предвосхитить дальнейшее развитие науки и, подымаясь на высоту, далеко превосходящую уровень современности, предопределить таким образом решительный поворот в науке и положить начало усиленной творческой работе в новой, доселе человеческому духу неведомой области. Творчество гения служит как бы водоразделом между отдельными историческими эпохами, являя собой высшую точку достижений завершаемой им эпохи и образуя фундамент новой, зарождающейся. Расходящиеся в необозримые дали лучи сияния гениального духа проникают часто в такие глубины и проявляются в таких областях, о которых современники и не подозревают.

Ф. Клейн

6.2. Рождение математического анализа. Ньютон и Лейбниц.

Другим, не менее выдающимся математическим открытием этого периода, кроме аналитической геометрии, является введение в рассмотрение понятия *функции*. Если до этого времени основными в математике были понятие числа и понятие геометрической фигуры, то с середины XVII века основным становится понятие функции. Происхождение любой важной идеи всегда можно проследить, углубляясь в историю на десятилетия, если не на века. В полной мере это относится и к понятию функции, которое начало оформляться задолго раньше XVII века. Тем не менее, явный смысл оно обрело лишь в XVII веке, а с началом XX века оно становится универсальным понятием, которое широко используется во всех областях знаний.

В становлении понятия функции возобладало новое представление функциональной зависимости – в виде формулы, а все прежние способы отошли на второй план. Здесь решающую роль сыграли два момента. Во-первых, создание эффективной символики в алгебре, начало которой положил Виет, что позволило записывать в сжатой и удобной форме алгебраическое выражение, включающее в себя неизвестные величины и произвольные коэффициенты. Во-вторых, создание Декартом и Ферма аналитической геометрии, в основе которой лежало, в частности, представление геометрических кривых в виде уравнения. Хотя Декарт рассматривал в основном такие кривые, уравнение которых представляет собой алгебраическое выражение, в течение короткого времени это ограничение было снято другими математиками, в том числе Ньютоном и Лейбницем, о чем будет говориться ниже. Лейбницу мы обязаны самим словом «функция».

Распространение этого понятия среди математиков дало возможность ввести и другие понятия, связанные с ним: непрерывная функция, производная функция, интеграл и т.п. Все эти понятия легли в основу математического анализа, который являлся основным и главенствующим направлением математики в рассматриваемый период времени.

В исторической математической литературе достаточно широко распространен взгляд, что предтечей математического анализа являются исследования двух великих греческих математиков Евдокса и Архимеда, которые разработали так называемый «*метод исчерпывания*». Этот метод они применяли к вычислению площадей и объемов геометрических фигур и тел. Метод исчерпывания по своей идее и осуществлению является аналогичным методу интегрирования, который в своем законченном виде появился почти две тысячи лет спустя. Поскольку он основан на геометрических соображениях, его можно условно назвать *геометрическим интегрированием,* ибо с идейных позиций сам метод и его применение полностью лежали в русле античной геометрии. Геометрическое интегрирование не имело никакой связи ни с физикой, ни с механикой Аристотеля. Этот факт имеет принципиальное значение для исторического развития математики.

Как Евдокс, так и Архимед свои математические утверждения тщательно *доказывали*, используя геометрические аксиомы. Конечно, их доказательства вряд ли удовлетворяли современным требованиям (для строгого завершения их доказательств необходимо что-то подобное предельному переходу). Но все же их рассуждения можно признать логически обоснованными как математические доказательства, удовлетворяющие античным требованиям проведения математических доказательств.

Арабы, которые познакомились с наследием Архимеда, продолжили и расширили его исследования, однако они больше обращали внимание на формулирование результатов, нежели на поиски доказательств. Их рассуждения, хотя они и использовали метод Архимеда, по своей логической строгости не шли ни в какое сравнение с уровнем работ древнегреческого ученого. Как мы уже неоднократно отмечали, арабы и индийцы не любили заниматься дедуктивными доказательствами.

Европейцы познакомились с методом исчерпывания в 1558 году, когда были переведены на латынь работы Архимеда. Одним из первых, кто стал применять идеи ученого, был Б. Кавальери, который в своем основном труде «Геометрия» (1635) развил разработанный им метод для определения площадей и объемов. Он назвал его методом неделимых. Неделимые — это части геометрических фигур, заключенных между параллельными линиями, проведенными на плоской фигуре, или между параллельными плоскостями, разделяющими геометрические тела. В одном из объяснений своего метода Кавальери называл его не более чем прагматическим приемом, позволяющим заменить сложный метод исчерпывания, идущий от греков. Из этого объяснения можно понять, что метод Кавальери был одним из видов геометрического интегрирования, полностью основанным на геометрических соображениях. В нем нет ничего такого, что бы не смогли сделать древние греки.

Наряду с книгой Кавальери, одним из наиболее важных произведений периода предтеч математического анализа была «Арифметика бесконечных» (1655) Валлиса. В отличие от Кавальери, Валлис применил к своим исследованиям алгебру. Он был первым математиком, у которого алгебра переросла в анализ. Те результаты, которые Валлис приводил в своей книге, отличались тем, что греки ни в коем случае не могли бы их получить. Он вводил в рассмотрение бесконечные ряды и бесконечные произведения, весьма смело обращался с мнимыми выражениями, с отрицательными и дробными показателями.

Валлис был только одним из целого ряда представителей этого периода, обогащавших математику одним блестящим открытием за другим. Среди них мы видим таких выдающихся математиков, как П. Ферма, Х. Гюйгенс, Б. Паскаль.

«Общий метод дифференцирования и интегрирования, построенный с полным пониманием того, что один процесс является обратным по отношению к другому, мог быть открыт только такими людьми, которые овладели как геометрическим методом греков и Кавальери, так и алгебраическим методом Декарта и Валлиса. Такие люди могли появиться лишь после 1660 г., и они действительно появились в лице Ньютона и Лейбница. Очень много написано по вопросу о приоритете этого открытия, но теперь установлено, что оба они открыли свои методы независимо друг от друга. Ньютон первым открыл анализ (в 1665 – 1666 гг.), Лейбниц в 1673 – 1676 гг., но Лейбниц первый выступил с этим в печати (Лейбниц в 1684 – 1686 гг., Ньютон в 1704 – 1736 гг. (посмертно)). Школа Лейбница была гораздо более блестящей, чем школа Ньютона» (Д.Я. Стройк, 1, с. 146).

И. Ньютон и Г. Лейбниц были универсальными учеными, причем каждый из них внес существенный вклад в различные области научной деятельности, не только в математику. Трудно соизмерить их роль в создании анализа, ибо вклад каждого в эту математическую дисциплину отличался принципиально один от другого по направлению, но не по значению. Важно еще отметить, что подходы как Ньютона, так и Лейбница отличались при построении математического анализа более широкими взглядами, выходящими далеко за пределы анализа, и носили также философский характер.

Рассмотрим и сравним вклад этих математиков в математический анализ. Сразу отметим, что этот вклад определялся прежде всего основными направлениями их научной деятельности: Ньютон был великим физиком, а Лейбниц – великим философом. Подход Ньютона можно назвать кинематическим подходом, связанным, прежде всего, с движением и силами. Подход же Лейбница был математическим; в его основе лежало понятие «характеристического треугольника», который ранее можно было встретить у Паскаля и Барроу. На другой аспект сравнения между подходами к созданию математического анализа этих двух великих ученых указывает известный математик XX в. М. Атья:

«Если в области анализа сопоставить работы Ньютона и Лейбница, то они принадлежат разным традициям: Ньютон был по существу геометр, а Лейбниц – по существу алгебраист; и для этого были веские, глубокие причины. Для Ньютона геометрия, как и развитый им анализ, – это попытка математически описать законы природы. Он имел дело с физикой в широком смысле слова, а физика существовала в мире геометрии. Если вы хотели понять, как устроены вещи, вы мыслили в терминах физического мира, в терминах геометрических картин. Когда Ньютон развивал анализ, он хотел придать ему такой вид, чтобы насколько возможно приблизиться к физическому контексту, стоявшему за ним. Поэтому Ньютон использовал геометрические рассуждения, так как это позволяло не удаляться от исходного смысла. С другой стороны, Лейбниц имел цель, и честолюбивую цель, формализовать всю математику, превратив ее в большую алгебраическую машину. Это было прямо противоположно подходу Ньютона. При этом они использовали совершенно различные обозначения. Как мы знаем, в большом споре между Ньютоном и Лейбницем победили обозначения Лейбница. Мы обозначаем производные, следуя его способу. Дух Ньютона по-прежнему присутствует там, но он погребен на долгое время» (М. Атья, 1, с. 10-11).

С созданием математического анализа закончилась эпоха греческой математики и началась эпоха *европейской теоретической математики*, которая принципиально отличается от греческой не только по месту ее развития, а по своему духу, о чем мы будем говорить ниже. Греческая математика не исчезла с возникновением европейской математики. Она просто отодвинулась на задний план, хотя и привлекала и привлекает и сегодня крупнейших математиков заниматься ее задачами.

Ньютон создал удивительный интеллектуальный синтез, который, с одной стороны, был теоретической математикой, а с другой – теоретической физикой. На это можно было бы посмотреть как на осуществление мечты греков-платоников. Основными элементами картины мироздания являлись математические объекты, в которые вкладывался определенный физический смысл.

Однако имелось принципиальное отличие, которое в корне меняло всю картину. Это отличие заключалось в том, что греки-платоники видели в математических объектах элементы, *объясняющие* физический мир, в то время как европейцы видели в них элементы, *описывающие* физический мир. Такое изменение взгляда позже оказало сильное влияние на всю идеалистическую философию, которая, продолжая греческую традицию, видела в математике собрание абсолютных истин. Если для одного и того же физического объекта существуют два отличных вида математического описания, то это может поколебать основы идеалистической философии.

Задачи естествознания, поставленные Ньютоном, потребовали разработки принципиально новых математических методов. Математика была для него главным орудием в его физических изысканиях. Ньютон не раз подчеркивал, что понятия математики заимствуются извне и возникают как абстракция явлений и процессов физического мира, и это означает, по его мнению, что математика является частью естествознания.

В области математики Ньютон получил значительное число различных результатов, среди которых можно указать ряд теорем в области бесконечных рядов, включая бином Ньютона для действительного показателя, интерполяционную формулу, теорию конических сечений, теоремы о симметрических функциях корней алгебраических уравнений и т.д. Определение числа, данное им не как собрание единиц, а как отношение длины любого отрезка к отрезку, принятому за единицу, явилось важным этапом в развитии учения о действительном числе.

Чисто математическому анализу Ньютон посвятил три работы, причем в каждой мы находим иную концепцию исчисления бесконечно малых. Но его вклад в математический анализ нельзя рассматривать без учета наиболее значительного сочинения: «Математические начала натуральной философии». Ньютон почти не занимался интегрированием, основное внимание уделяя понятию производной.

Первая его работа — «Анализ при помощи уравнений с бесконечным числом членов» (написана в 1669 г. и опубликована в 1711 г.) — посвящена вычислению производной (которую он называл флюксией) как отношению дискретных переменных, достаточно малых, но неделимых величин, которые называются моментами. Эта концепция бесконечно малых сложилась под влиянием Барроу и Валлиса. В этой работе Ньютон четко установил связь между квадратурами и производной. Здесь тщетно искать явные определения производной, интеграла или других основных понятий анализа.

Во второй работе – «Методы флюксий и бесконечные ряды» (написана в 1671г. и опубликована в 1736 г.) – Ньютон изменил свою точку зрения на переменные, которые теперь рассматривал как непрерывно изменяющиеся величины. Именно в этой работе ученый дал наиболее полное изложение дифференциального и интегрального исчисления, основанных на методе флюксий. Он так сформулировал две основные задачи математического анализа:

«Длина проходимого пути постоянно (т.е. в каждый момент времени – Е.Л.) дана, требуется найти скорость движения в предложенное время».

«Скорость движения постоянно дана; требуется найти длину пройденного в предложенное время пути».

Уже в понятиях и терминологии метода флюксий с полной отчетливостью отразилась глубокая связь математических и механических исследований Ньютона. Понятие непрерывной математической величины он вводит как абстракцию от различных видов механического движения. Линии производятся движением точек, поверхности – движением линий, тела – поверхностей и т.д. Переменные величины Ньютон назвал флюэнтами; общим аргументом текущих величин – флюэнт – является у него «абсолютное время», к которому отнесены прочие, зависимые переменные. Скорости изменения флюэнт были названы флюксиями, а необходимые для вычисления флюксий бесконечно малые изменения флюэнт – «моментами» (у Лейбница они назывались дифференциалами). Таким образом, Ньютон положил в основу математического анализа такие понятия, как флюксия (производная) и флюэнт (первообразный, или неопределенный интеграл). Он формулирует две основные взаимно-обратные задачи анализа: 1) определение скорости движения в данный момент времени по известному пути, или определение соотношения между флюксиями по данному соотношению между флюэнтами (задача дифференцирования), и 2) определение пройденного за данное время пути по известной скорости движения, или определение соотношения между флюэнтами по данному соотношению между флюксиями (задача интегрирования и отыскания первообразных). Метод флюксий применяется здесь к большому числу различных задач: на касательные, кривизну, поиск экстремумов, квадратуры и др.

В своей третьей статье – «Рассуждения о квадратуре кривых» (написанной в 1676 г. и опубликованной в 1704 г.), – а также в «Началах» Ньютон намечает программу построения метода флюксий на основе учения о пределе, о «последних отношениях исчезающих величин» или «первых отношениях зарождающихся величин», не давая, впрочем, формального определения предела и рассматривая его как первичное понятие. В качестве примера можно привести цитату из «Начал», где он дает объяснение понятию флюксии:

«Делают возражение, что для исчерпывающих количеств не существует "предельного отношения", ибо то отношение, которое имеют ранее исчезания, не есть предельное, после же исчезания нет никакого отношения. Но при таком и столь натянутом рассуждении окажется, что у тела, достигающего какого-либо места, где движение прекращается, не может быть "предельной" скорости, ибо та скорость, которую тело имеет ранее, нежели оно достигло этого места, не есть "предельная", когда же достигло, то нет скорости. Ответ простой: под "предельной" скоростью надо разуметь ту, с которою тело движется не перед тем, как достигнуть крайнего места, где движение прекращается, и не после того, а когда достигает, т.е. именно ту скорость, обладая которой тело достигает крайнего места и при которой движение прекращается. Подобно этому, под предельным отношением исчезающих количеств должно быть разумеемо отношение количеств не перед тем, как они исчезают, и не после того, но при котором исчезают».

«Предельные отношения исчезающих количеств не суть отношения пределов этих количеств, а суть те пределы, к которым при бесконечном убывании количеств приближаются отношения их и к которым эти отношения могут подойти ближе, нежели на любую наперед заданную разность, но которых превзойти или достигнуть на самом деле не могут, ранее, чем эти количества уменьшатся бесконечно».

В ньютоновской идее предельного отношения замечен отпечаток концепции числа как абстрактного отношения одной величины к другой величине того же рода, принятой за единицу, ибо Ньютон никогда не рассматривал флюксию какой-либо величины, а всегда только отношение двух флюксий.

Новаторство Ньютона заключалось в том, что у него применение бесконечных рядов стало как общим методом, так и техническим приемом интегрирования. Он разлагал функции в бесконечные ряды и интегрировал их почленно, распространив законность почленного интегрирования на бесконечные суммы, хотя доказал ее лишь для конечных сумм.

Резюмируя наше рассмотрение достижений Ньютона в области математики, можно прежде всего утверждать, что его подход к созданию математического анализа был оригинальным, никоим образом не вытекающим из метода исчерпывания и модификаций этого метода. Другими словами, математический анализ принадлежал уже другой математике – европейской. Именно с Ньютона, по существу, начинается европейская математика, которая принципиально отличается от греческой. Все принципиальные отличия европейской математики от греческой мы можем видеть в работах Ньютона.

Во-первых, европейская математика по своим целям, по своей направленности полностью отличается от целей и направленности греческой математики. Греческая математика, как мы пытались показать выше, была, по своей сути, интеллектуальным искусством. Более того, только философы могли говорить о связи математики с природой. Греческая математика не могла помочь в объяснении или описании ни одного природного явления. Европейская математика, благодаря Ньютону, стала неотъемлемой частью европейского естествознания: это естествознание (физика и астрономия) заговорило на математическом языке. Именно обращение математики к естествознанию превратило ее из отрасли интеллектуального искусства в прикладную научную дисциплину.

Во-вторых, Ньютон ввел движение в алгебру. Как мы отмечали выше, своими достижениями греческая геометрия прежде всего обязана тому, что в ней используется движение в процессе доказательства теорем и построения геометрических фигур. Однако, по своей сути, движение в геометрии не является непрерывным, оно является либо наложением, либо переносом. Эти операции можно с достаточной долей общности рассматривать как дискретные. Непрерывность в геометрии можно встретить только при построении геометрических фигур, и то только потому, что греки использовали в геометрии циркуль и линейку. Греки старались обходить стороной непрерывность, ибо при ее рассмотрении с философской точки зрения встречалось достаточное количество парадоксов. Их алгебра и арифметика была дискретными. Математический анализ Ньютона, рассматриваемый как часть алгебры, в качестве основных математических объектов использует непрерывные функции. Дифференцирование гораздо легче объяснить, используя движение. Другими словами, европейская алгебра стала непрерывной.

Необходимо отметить, что Ньютону удалось сделать то, что не удалось сделать Декарту: математический анализ больше подходил для соединения пространства и движения, нежели аналитическая геометрия. Введение понятия непрерывности функций позволило открыть для европейской математики новые широкие просторы деятельности, ибо те возможности для этого, которые указала греческая математика, были уже практически использованы.

Математический анализ, построенный Ньютоном, был в его время *полуматематикой*. Это связано с тем, что вся теория чисел, а тем более алгебра, были полуматематикой. Проводить строгие математические доказательства было невозможно, ибо отсутствовала необходимая система аксиом. Поэтому и большинство утверждений в математическом анализе были не теоремами, а скорее формулами или некоторыми алгоритмами вычислений значений функций или решения уравнений. Ньютона часто обвиняют в отсутствии математической строгости, которая теоретически не могла у него быть в силу ряда принципиальных причин. Но необходимо отметить, что Ньютон стремился и старался достичь математической строгости. Об этом свидетельствует тот факт, что там, где это было возможно, он доказывал математические утверждения с помощью геометрической алгебры, т.е. на основании аксиом геометрии.

Появление новой математической дисциплины, которая встала в ряд с существовавшими до того геометрией, арифметикой и алгеброй, произвело революционный переворот в математике, поставив новую отрасль во главе этой науки. Математический анализ стал главенствующей отраслью во время всего второго периода развития математики. Он способствовал еще большему отделению алгебры и арифметики от геометрии, усилил алгебраизацию математики в целом.

Напомним, что работы Ньютона совершили революционный переворот сразу в трех областях интеллектуального познания: в метафизике (т.е. в определенной области философии, связанной с познанием), в физике и в математике. В метафизике этот переворот заключался прежде всего в том, что изменились цели научной деятельности. Теперь стали считать, что основной целью науки является не нахождение объяснения физическим явлениям, а поиск описания этих явлений с помощью математического языка. Другими словами, произошла замена словесной модели, которая служила *объяснением* физического явления, на математическую модель, которая служит *описанием* этого явления. Подобное изменение целей науки вынудило изменить и все строение метафизики и оказало большое влияние на всю философию в целом. В частности, эта революция нашла свое яркое выражение в философии И. Канта.

В физике революция Ньютона заключалась прежде всего в том, что он построил первую логически стройную аксиоматическую математическую модель Вселенной. Построение подобной модели явилось, по существу, осуществлением мечты древних греков о построении физики в виде аксиоматической теории. Эта модель явилась в дальнейшем базой для построения теоретической механики, с чего и началась теоретическая физика.

Другой аспект этой революции заключается в том, что впервые математические символы (понятия) стали толковаться как интеллектуальные ненаблюдаемые объекты, несущие определенное интеллектуальное нематематическое содержание. С этого момента математические термины и понятия стали иметь и так называемое «прикладное» содержание: ненаблюдаемые интеллектуальные объекты, обозначаемые математическими понятиями, стали рассматриваться как ненаблюдаемые элементы окружающего мира. Как мы уже отмечали выше, и греки в прошлом при построении интеллектуальной картины мира использовали ненаблюдаемые интеллектуальные понятия (объекты). Однако начиная с Ньютона, только математические объекты, являющиеся элементами математических теорий, стали служить ненаблюдаемыми интеллектуальными объектами, используемыми для описания природных процессов и явлений.

Процесс введения в рассмотрение новых математических понятий в это время существенно отличался от аналогичного процесса во времена древних греков. Все математические понятия, введенные греками, имели достаточно широкую реальную основу, т.е. являлись результатом процесса абстрагирования объектов, которые встречаются в реальной жизни. Именно поэтому эти понятия легко усваивались и применялись. Индусы и арабы ввели в рассмотрение отрицательные и иррациональные числа, но их усвоение растянулось на многие годы и даже столетия, хотя они имели определенный «реальный» смысл, реальное основание. Отрицательные числа возникли при решении практических хозяйственных задач, а иррациональные числа пришли из геометрии. Появление комплексных чисел, а также алгебры, использующей буквенные коэффициенты, понятия производной и интеграла, совершенно изменило картину в математике, ибо эти понятия качественно представляли собой абстракции более высокого порядка, чем, например, натуральные числа или треугольник. Введение математических понятий высокой степени абстракции, которые были продуктом человеческого интеллекта, а не обобщением объектов, встречающихся в природе, в дальнейшем привело к значительным сложным проблемам, связанным с построением логического обоснования математического анализа.

Математический аппарат, примененный Ньютоном для построения физической теории, поставил несколько принципиальных проблем перед метафизикой, а тем самым и перед философией. В основе математической модели, как мы уже отмечали, лежит понятие непрерывной функции. Сущность непрерывной функции, в частности, заключается в том, что она допускает бесконечное деление аргумента функции. Использование этого математического объекта как символа функционирования физического объекта противоречит основным философским предположениям, лежащим в основе метафизики, которые отражают дискретность в определенном смысле физических явлений. Среди этих предположений, противоречащим непрерывности, находится и атомная гипотеза, что, в конечном счете, впоследствии привело к проблемам включения квантовой механики в общую физику, построенную в первой половине XX века.

Таким образом, использование математического анализа для моделирования физических объектов или явлений требовало принципиального изменения метафизики. Все попытки Ньютона совместить непрерывность функции с дискретностью аргумента закончились провалом, ибо в этом случае невозможно было получить необходимые для физического исследования результаты, поскольку тогдашняя математика (включая и математический анализ) оказалась бессильной сформулировать мало-мальски нетривиальную математическую теорию.

На развитие математики существенное влияние оказал один из крупнейших ученых XVII века Г. Лейбниц, который был и математиком, и физиком, и изобретателем, и юристом, и историком, и языковедом. Он разработал основные понятия дифференциального и интегрального исчисления, исходя из геометрии кривых. Именно в этой области впервые появился термин «функция», под чем он понимал любую линию, которая в общепринятом смысле слова «выполняет свою функцию» в фигуре: играет роль касательной, нормали и т.д., и таким образом «функционирует». Отметим несколько основных моментов, характеризующих вклад Лейбница в развитие математики.

Во-первых, как уже сказано выше, одновременно с Ньютоном и независимо от него он является основателем математического анализа. Познакомившись с трудами Ферма, Паскаля, Декарта, Валлиса и других математиков, он в 1675 г. создал свою версию дифференциального исчисления, а через год – и интегрального исчисления.

Версию своего дифференциального исчисления Лейбниц изложил в статье, опубликованной в 1684 г. под названием «Новый метод для максимов и минимумов, а также касательных, для которого не являются препятствием дробные и иррациональные количества, и особый вид исчисления для этого». В этой статье он ввел основные обозначения, которые и сегодня являются основными для дифференциального исчисления. Вторая статья, опубликованная в 1686 г., содержала основные правила интегрального исчисления. Здесь же Лейбниц ввел символ интеграла, который до сих пор употребляется в математике.

Факты с достаточной убедительностью доказывают, что Лейбниц хотя и не знал о методе флюксий, но был подведен к своему открытию письмами Ньютона. С другой стороны, несомненно, что открытие Лейбница по общности, удобству обозначений и подробной разработке метода стало орудием анализа, более эффективным и популярным, чем методы флюксий и флюэнтов Ньютона. В подтверждение этого достаточно перечислить те математические термины, которые вошли в математику благодаря Лейбницу: дифференциал, дифференциальное исчисление, дифференциальное уравнение, функция, переменная, постоянная, координаты, абсцисса, алгебраические и трансцендентные кривые, алгоритм, модель и др.

Лейбниц – один из самых плодовитых изобретателей математических символов. В частности, он ввел те обозначения для дифференциала и интеграла, о которых мы говорили выше и которые мы и сегодня употребляем. Благодаря ему стали пользоваться знаком « = » для равенства и знаком « . » для умножения. Немногие так хорошо понимали единство формы и содержания, как Лейбниц.

Во-вторых, Лейбниц был тем, кто после Аристотеля внес наибольший вклад в логику. В логике он развил учение об анализе и синтезе, впервые сформулировал закон достаточного основания, ему принадлежит также принятая в современной логике формулировка закона тождества. В его работе «Об искусстве комбинаторики» (1666 г.) предвосхищены некоторые моменты современной математической логики. В частности, он выдвинул идею применения в логике математической символики и построений логических исчислений, т.е. поставил задачу логического обоснования математики. Математика, по Лейбницу, есть особый случай применения логики. Если с точки зрения Декарта математика представляет собой самый строгий и чистый тип знания, который должен служить образцом для всей науки, то Лейбниц, напротив, убежден в том, что «начала», аксиомы математики не первичны, а имеют свои основания в исходных логических аксиомах.

В третьих, Лейбниц сконструировал счетную машину, которая выполняла не только сложение и вычитание, как это было у Паскаля, но и умножение, деление, возведение в степень, извлечение квадратного и кубического корней. Свыше 40 лет он посвятил усовершенствованию этого изобретения. Именно поэтому его можно считать идейным предтечей современной машинной математики. Он предложил использовать бинарную систему счисления для целей вычислительной математики. Лейбниц впервые высказал мысль о моделировании человеческих функций.

С именем Лейбница связаны имена двух крупных математиков XVII века, которые были его учениками. Это братья Якоб и Иоганн Бернулли, которые стали родоначальниками целой династии математиков. Познакомившись со статьями Лейбница, они решили стать математиками. С помощью писем, постоянно обмениваясь мыслями с Лейбницем и между собой, они начали открывать сокровища, которые были заложены в математическом анализе. Список их исследований длинен и содержит ряд основополагающих работ, результаты которых вошли в современные учебники. В частности, братья Бернулли внесли большой вклад в теорию дифференциальных уравнений и в вариационное исчисление. Отметим, что первый учебник по математическому анализу был написан маркизом Лопиталем, учеником Иоганна Бернулли, опубликовавшим лекции своего учителя по дифференциальному исчислению в книге «Анализ бесконечно малых» (1696).

Из сказанного выше следует, что в XVII веке в математике произошла подлинная революция, которая по своему значению не уступает той, что связана с рождением математики вообще. В предисловии к «Анализу бесконечно малых» Лопиталь пишет:

«Область применения этого исчисления колоссальна: оно годится как для механических, так и для геометрических кривых; его нисколько не смущают знаки радикала, оказавшиеся часто очень даже удобными; его можно применить к какому угодно количеству неопределенных; для него представляется одинаково легким сравнение бесконечно малых всех родов. Это дает начало бесконечному множеству поразительных открытий…»

В XVII веке родилась европейская теоретическая математика, построенная на совершенно других принципах, нежели греческая математика. Европейская математика с первых своих дней отличалась от греческой математики и своим языком, и своими целями, и типами задач, составляющих предмет ее исследований. Она являлась, по существу, *математической физикой*, основной целью которой было построение математических моделей для описания физических явлений и поведения физических объектов.

Если греческая математика была дискретной математикой, то европейская математика была тесно связана с понятием непрерывности. Потребовалось почти два столетия для того, чтобы выделить понятие математической непрерывности и отделить его от физической и метафизической непрерывности. Отделение математической непрерывности от физической, а также от метафизической непрерывности позволило математикам избежать в этой области парадоксов типа Зенона.

Вместе с возникновением математического анализа были впервые строго определены, с помощью бесконечных степенных рядов, прежде всего так называемые элементарные математические функции: степенная функция, логарифмическая и показательная функции, тригонометрические функции.

6.3. Другие отрасли математики в XVII в.

Работы математиков XVII в. охватывали много других областей математики, новых и старых, а не только математический анализ. Они обогатили оригинальными результатами классические разделы, пролили новый свет на прежние области знания и создали совершенно новые разделы математических исследований. Примером первого рода могут служить исследования П. Ферма в теории чисел в духе Диофанта, второго рода – создание проективной геометрии Ж. Дезаргом, а третьего – возникновение теории вероятностей в работах П. Ферма, Б. Паскаля и Х. Гюйгенса.

Отправной точкой для Ферма в теории чисел послужила «Арифметика» Диофанта, латинский перевод которой появился в 1621 г. Ферма был первым, кто в теории чисел ограничился областью целых чисел, которая и представлялась ему самой сутью арифметики. В арифметике он интересовался простыми числами и делимостью чисел. Он высказал достаточно много теоретико-числовых утверждений, часть из которых была доказана только в следующем веке. Наиболее известным утверждением Ферма является так называемая Большая теорема Ферма, на доказательство которой математическое сообщество затратила три с половиной века. Попытки доказать эту теорему в течение этого времени оказались достаточно плодотворными для математики, ибо они привели к созданию ряда новых математических теорий и методов. Все рассуждения и формулировки утверждений Ферма в теории чисел не выходили за рамки греческой теории чисел.

Подобный подход мы наблюдаем и в проективной геометрии: все рассуждения и формулировки не выходят за рамки евклидовой геометрии, причем в этом случае не рассматриваются метрические соотношения. Корни проективной геометрии уходят во времена Возрождения, когда многие художники и архитекторы уделяли немало времени изучению перспективы, т.е. проекции объекта на плоскость, так, как видит ее человеческий глаз. Позже возник вопрос: какие общие свойства у двух различных проекций одной и той же фигуры? Этот вопрос и лег в основу проективной геометрии.

Первые принципиальные математические результаты в проективной геометрии были получены Ж. Дезаргом, который в своей книге «Черновой набросок подхода к явлениям, происходящим при встрече конуса с плоскостью» (1639) стал изучать общие свойства пересечения конуса плоскостью. На этом пути он получил ряд интересных утверждений. Его идеи были подхвачены Б. Паскалем и Ф. Лаиром. После Лаира проективные методы почти на целый век были преданы забвению.

В XVII веке появилась новая отрасль полуматематики, которая сыграла значительную роль в физике XIX и XX веков, и только в XX веке вошла в математику, ибо лишь тогда она получила аксиоматическое строение. Речь идет о теории вероятности, у колыбели которой стояли Паскаль, Ферма, Гюйгенс. Своим возникновением эта теория обязана задаче о разделении очков между двумя игроками, в том случае, когда их игра прерывается до того, как один из игроков выигрывает ее. Данная задача в 1654 г. была предложена Паскалю, который завязал переписку по этому поводу с Ферма. В процессе ее решения они неявно использовали понятие вероятности события.

Будучи в Париже, один из выдающихся ученых XVII в. Х. Гюйгенс узнал об этой задаче, которая его заинтересовала. В результате ее решения появилась на свет его книга «О расчетах в азартной игре» (1657). В начале этой книги вводится понятие математического ожидания, которое используется для решения разнообразных задач на справедливое разделение ставок при разном количестве игроков и разном количестве недостающих партий. Именно математическое ожидание явилось первым теоретико-вероятностным понятием. С этого момента можно уже говорить о возникновении теории вероятностей.

Книга Гюйгенса выдержала ряд изданий и переводов и была фактически единственным трудом по теории вероятностей до начала XVIII в. Она оказала большое влияние на многих ученых, в том числе и на Я. Бернулли, который достиг в этой области основополагающих результатов. Эти результаты, полученные в 80-х годах XVII в., были изложены в книге «Искусство предположений», изданной в 1713 г. В ней Я. Бернулли высказывает общие соображения о природе случайных событий, а затем выводит носящую теперь его имя теорему, лежащую в основе всех последующих исследований о закономерностях случайных массовых явлений. Теорема Бернулли является первой в цепи утверждений, образующих закон больших чисел. На этой теореме и ее обобщениях основаны все применения теории вероятностей к природным и общественным явлениям.

Теория вероятностей является продуктом европейской математики и не имеет никаких корней в греческой математике.

И в вычислениях на логарифмической линейке можно найти известную поэзию.

К. Ф. Гаусс

6.4. Прематематика в XVII веке.

В конце XVI в.произошли два события, которые существенно повлияли на развитие прематематики в последующие столетия.

Во-первых, появилась символика Виета, что позволило записывать методики решения практических задач в виде формулы. Каждая формула описывала методику целого класса однотипных задач, отличающихся друг от друга различными конкретными числовыми значениями. Символика Виета была улучшена в XVII в. Декартом и другими математиками. В частности, как мы уже отмечали, к введению символов арифметических действий приложил руку и Лейбниц.

Во-вторых, появились десятичные дроби, введенные С. Стевином, которые позволили существенно упростить сам процесс проведения вычислений дробных чисел.

На протяжении XVI в. быстро возрастало количество производимых вычислений, и к началу XVII в. вычислители стали задумываться об облегчении бремени. Можно выделить по крайней мере две причины, которые вызвали этот рост объема вычислений. Во-первых, это было вызвано расширением хозяйственной деятельности, а во-вторых – потребностью проводить расчеты, связанные с астрономией. Так, например, расширение страховой и финансовой деятельности потребовало таблицы сложных процентов для различных значений процента, и т.д. С совершенствованием астрономических инструментов увеличилась точность наблюдений, а вместе с тем и объем астрономических таблиц.

Исследование движений планет, в связи с разработкой системы Коперника, потребовало проведения огромного числа вычислений. В качестве примера можно привести тот факт, что выкладки Кеплера по расчету орбиты Марса заняли у него несколько лет. Главную трудность представляло умножение и деление многозначных чисел.

Для облегчения бремени вычислителей XVII век предложил два пути. Первый путь заключался в создании новых, более эффективных методов проведения расчетов, а второй состоял в создании эффективных инструментов для проведения вычислений.

На первом пути революцию в технике счета произвело открытие логарифмов. Логарифмы были изобретены независимо друг от друга Непером, и лет на десять позднее – Бюрги. Они хотели дать новое удобное средство арифметических вычислений, но подошли к своей задаче по-разному. Непер кинематически выразил логарифмическую функцию и по существу вступил в область теории функций. Бюрги остался на почве рассмотрения дискретных прогрессий. Однако у обоих определения логарифма не похожи на современные.

Бюрги исходил из соответствия между умножением в геометрической прогрессии и сложением в арифметической прогрессии. Задача состояла в выборе геометрической прогрессии со знаменателем, достаточно близким к единице, с тем, чтобы ее члены следовали друг за другом с интервалами, достаточно малыми для практических вычислений. Бюрги взял за знаменатель геометрической прогрессии 1,0001 и за разность арифметической последовательности – 10. Таблицы Бюрги не получили широкого распространения, ибо они не могли конкурировать с таблицами Непера, которые были более удобны.

Таблицы Непера были опубликованы в 1614 г. в книге «Описание удивительной таблицы логарифмов». В этой книге он изложил определение своих логарифмов, свойства и таблицы логарифмов синусов и косинусов, а также разности этих логарифмов, дающие логарифмы тангенсов. В отличие от Бюрги, Непер с самого начала вводил понятие логарифма для всех значений непрерывно меняющихся «синуса» и «косинуса» (по определению Непера).

В системе Непера, как и у Бюрги, не было, строго говоря, основания логарифма, поскольку их логарифмы от единицы были отличны от нуля. Это означает, что наше употребление термина «логарифм» по отношению к объектам, которые ввели Непер и Бюрги, может ввести в заблуждение, ибо современное понятие «логарифм» появилось только в следующем веке.

Непер в 1617 г. издает книгу под названием «Рабдология», в которой он изложил различные приемы облегченного счета. В предисловии к этой книге он пишет:

> “Я всегда старался, насколько позволяли мои силы и способности, освободить людей от трудности и скуки вычислений, докучливость которых отпугивает многих от изучения математики”.

Открытие логарифмов приветствовали все, кому приходилось осуществлять массу вычислений. Крупнейший французский математик следующего века говорил, что Непер своим открытием удлинил жизнь астрономам. Подобные высказывания можно найти и у других, например, у Кеплера, который в одном из своих писем писал:

> «Некий шотландский барон, имени которого я не запомнил, выступил с блестящим достижением: он каждую задачу на умножение и деление превращает в чистое сложение и вычитание».

Таблицы Непера были неудобны в употреблении. Для усовершенствования своих таблиц Непер предложил составить таблицы, приняв за логарифм единицы нуль, а за логарифм десяти – 10^{10}. Г. Бриггс усовершенствовал метод Непера. В 1617 г. появились первые таблицы десятичных логарифмов. Новое изобретение сразу приветствовали математики и астрономы, в частности, Кеплер, у которого был большой и нелегкий опыт в деле обширных вычислений.

Среди различных важных нововведений в технике счета в этом столетии нужно отметить одно, принадлежащее Лейбницу, который усовершенствовал вычисление сложных процентов, ставшее возможным благодаря употреблению логарифмов.

Развитие машинной техники, естественно, наводило на мысль построить для вычислений механическое устройство. В первой половине XVII в. появились сразу два таких устройства, разработанные независимо друг от друга В. Шиккардом (1623) и Б. Паскалем (1642). Своему изобретению Паскаль придавал большое значение, подчеркивая безошибочность машины, простоту обращения с нею и другие достоинства. Он организовал даже изготовление нескольких десятков таких машин. Наконец, в 1671 г., не зная ничего о полностью забытом к тому времени изобретении Шиккарда, Лейбниц предложил новую конструкцию вычислительной машины, которая более эффективно, нежели ее предшественницы, выполняла умножение и сложение. Изобретенные вычислительные машины в то время не смогли быть использованы.

Однако другое изобретение XVII в. – логарифмическая линейка – нашла широкое применение, которое не прекращалось вплоть до последних десятилетий XX в. Логарифмическая линейка в современном виде была изобретена в несколько этапов. Основной вклад был сделан Э. Гунтером, придумавшим саму логарифмическую шкалу. (Э. Гунтер ввел в рассмотрение обозначение log и термины «косинус» и «котангенс».) В. Отред предложил употреблять две одинаковые шкалы, одна из которых перемещается вдоль другой. Линейка приняла современный вид в 1662 г., когда С. Партридж заставил двигаться одну шкалу в пазу другой.

В XVII в. были заложены первые научные основы статистики. Начало статистической науки, которая на первом этапе называлась политической арифметикой, было положено в первую очередь работами Джона Граунта и Вильяма Пети. Эти работы в большой мере использовали бюллетени о естественном движении населения Лондона, которые велись с XVI в. Первая работа Граунта так и называется: «Естественные и политические наблюдения над бюллетенями смертности» (1662). Он же был первым, кто составил таблицу смертности. Вслед за ним таблицы смертности были составлены и другими учеными. Например, уже в 1669 году Гюйгенс применил вероятности для построения таблиц смертности, а в 1671 году первую таблицу смертности с целью правильного вычисления пожизненных рент составил Я. де-Витт.

Наиболее значительными работами Пети являются «Политическая арифметика» (1676) и «Замечания относительно Дублинских бюллетеней смертности» (1683). В этих работах от подсчитывает необходимое количество людей различных профессий как в настоящее время, так и в будущем, величину необходимых налогов, величину народного богатства и доходов, количество населения Лондона и т.п.

Основоположное значение для всей теории статистических исследований приобрели выводы и таблицы, составленные Э. Галлеем, что были опубликованы в 1694 году. Он составил таблицу одновременно живущих людей по различным возрастным группам для случая стационарного населения и по ней определил для каждого возраста вероятность дожития. На базе вычислений Галлея в Лондоне была создана вдовья и сиротская кассы.

Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки физических законов. Это чудесный дар, который не понимаем и не заслуживаем. Нам остается лишь благодарить судьбу и надеяться, что и в будущих своих исследованиях мы сможем по-прежнему пользоваться им. Мы думаем, что сфера его применимости (хорошо это или плохо) будет возрастать, принося нам не только радость, но и новые головоломные проблемы.

Ю. Вигнер

6.5. Прагматические числа и прагматическая математика.

В конце XVI – в начале XVII вв. появился ряд новых вычислительных задач, с которыми раньше прематематика не встречалась. Эти задачи не были непосредственно обусловлены практическими нуждами, а пришли из трех источников: прематематики, теоретической математики и экспериментальной физики. Они могли возникнуть только в это время, ибо тогда появился символический язык для записи формул (Виет), а также получили распространение десятичные дроби (Стевин). Эти новые вычислительные задачи обладали несколькими общими особенностями. Во-первых, они использовали неименованные числа; во-вторых, эти числа были полностью представлены в десятичной позиционной системе; в-третьих, вычисления производились по формулам.

Как мы уже говорили выше, для увеличения эффективности процесса прематематических вычислений, в частности, астрономических расчетов, в начале XVII в. стали широко использовать логарифмы. Логарифмы уже не были прематематическими числами. Они были неименованными числами, представленными в десятичной системе, — запись, в которую входили десять цифр и запятая (или точка), отделяющая целую часть числа от его дробной части.

Вычислительные задачи, которые пришли из теоретической математики, можно разделить на два типа. *Первый* тип задач пришел из алгебры: приближенное нахождение корней алгебраических уравнений.

Введение символического алгебраического языка Виетом и его усовершенствование Декартом позволило на достаточно строгой основе построить теорию алгебраических уравнений. Этому построению способствовало два момента. Во-первых, символически можно было представить общий вид алгебраического уравнения, что позволяло сформулировать задачи в общем виде. Во-вторых — дать чисто формальное определение корня алгебраического уравнения.

Здесь необходимо напомнить, что до этого времени под корнями алгебраического уравнения понимали объекты совершенно разной природы, которые представляли различными способами. Греки ввели в рассмотрение в качестве корней положительные рациональные алгебраические числа, которые мы встречаем у Диофанта. Индийская арифметика стала рассматривать корни из целых положительных чисел. Более того, появились методы приближенного вычисления корней.

Затем арабы стали рассматривать отрицательные рациональные алгебраические числа, а также квадратные корни и выражения, где наряду с рациональными алгебраическими числами используются и квадратные корни от положительных рациональных чисел. Необходимо помнить, что корни и выражения из корней являлись только символами (или «словами»), которые не несли никакой количественной смысловой нагрузки. С этих позиций они были просто или символами корней уравнения, или комбинацией корней уравнения.

Европейцы начали рассматривать корни более высоких степеней от положительных рациональных чисел, для которых были введены специальные символы. Более того, некоторые из европейских математиков начали использовать корни из отрицательных чисел. Такое многообразие различного сорта объектов вносило сумятицу в ряды математиков. В качестве примера можно привести слова М. Клайна, описывающего ситуацию с отрицательными числами:

«Европейцам пришлось столкнуться и с проблемой отрицательных чисел. Эти числа стали известны в Европе из арабских текстов, но большинство математиков XVI – XVII вв. не считали отрицательные числа «настоящими» или утверждали, что отрицательные числа не могут быть корнями уравнений. Никола Шюке в XV в. и Штифель в XVI в. заявляли, что отрицательные числа лишены всякого смысла. Кардано включал отрицательные числа в число корней рассматриваемых им уравнений, но полагал, что отрицательные корни – это просто символы, не имеющие реального смысла. Отрицательные корни Кардано называл фиктивными и противопоставлял их действительным, т.е. положительным корням. Виет полностью отвергал отрицательные числа. Декарт принимал их лишь с определенными оговорками. Отрицательные корни уравнений Декарт называл ложными на том основании, что они якобы представляют числа, которые меньше, чем ничто. … Паскаль считал, например, вычитание 4 из 0 операцией, лишенной всякого смысла. В “Мыслях” Паскаля есть выразительное признание: “Я знаю людей, которые никак не могут понять, что если из нуля вычесть четыре, то получится нуль”» (М. Клайн, 1, с. 136).

Как видно из этой цитаты, такая сумятица в отношении отрицательных чисел вызвана смешением прематематических и алгебраических чисел. Прематематические числа возникали для решения содержательных задач, имеющих реальный смысл. Алгебраические числа возникали для решения абстрактных умозрительных задач, и поэтому они являются просто символами, которыми можно манипулировать по определенным правилам. Это мы четко видим при сравнении прематематических задач с задачами из «Арифметики» Диофанта.

С давних пор известно, что не каждый корень алгебраического уравнения является рациональным числом. С введением позиционной десятичной системы представления чисел возник вопрос о *приближенном вычислении корней* алгебраического уравнения. Прежде чем обсудить этот вопрос введем важное понятие.

Назовем ***прагматическим числом*** такое, которое в десятичной позиционной системе допускает представление, состоящее из конечного числа цифр. Очевидно, что каждое из прагматических чисел является рациональным алгебраическим числом. Однако не каждое рациональное алгебраическое число можно представить как прагматическое, а тем более не каждое алгебраическое число можно однозначно представить в виде прагматического числа.

Целые прагматические числа были введены в рассмотрение еще индийцами. Они широко использовались арабами, и через них они пришли в Европу, о чем уже говорилось в предыдущих главах. Впервые десятичные дроби стал использовать Ф. Виет в своей книге «Математический канон», который был опубликован в 1579 г. в Париже. Однако широкое распространение этих дробей в Европе началось только после выхода книги С. Стевина «Десятая» в 1585 г. Таким образом, в своем общем виде прагматические числа стали широко использоваться только в конце XVI в.

По аналогии, на множестве прагматических чисел естественным образом определяются арифметические операции сложения, вычитания и умножения этих чисел. Гораздо сложнее дело обстоит с делением и извлечением корней. Как показывает опыт, результат деления двух прагматических чисел (например, 1/7) и корень из прагматического числа нельзя представить в виде прагматического числа. Это означает также, что не всякий корень алгебраического уравнения можно представить в виде прагматического числа.

Начиная с индийцев, в прематематике стали использовать десятичную позиционную систему для представления чисел. Но тогда, в силу введенного определения, можно сказать, что количественная часть прематематических чисел является прагматическим числом. Индийцы в своей арифметике разработали правила проведения арифметических операций и извлечение квадратного корня для прематематических чисел. Используя аналогию, можно определить подобные операции над прагматическими числами.

Как уже отмечалось, часто результат деления двух прагматических чисел и извлечения корня из прагматического числа не является прагматическим числом. Однако при решении практических задач индийцы и арабы все же приписывали результатам деления и извлечения корня некие прагматические числа, которые историками математики называются приближенными значениями искомых результатов. По всей вероятности, до нового времени те, кто производил вычисления, не имели никакого понятия о «приближенных значениях» – они просто выполняли определенную инструкцию. Так как каждый вычислитель имел собственный метод, то и при решении одной и той же задачи часто получались разные результаты. Но проблема выбора между несколькими результатами решения одной и той же задачи не стояла в то время.

Одним из распространенных типов вычислительных математических задач были задачи, требующие решить алгебраическое уравнение. На протяжении всего XVII столетия математики искали методы решения таких уравнений произвольной степени. Не находя их, Декарт, Ньютон, Лагранж и другие исследовали методы численного решения: правила разделения корней, нахождение числа действительных корней, правила определения знаков корней, методы аппроксимации Ньютона, Лагранжа, а также теорию исключения неизвестной из двух уравнений, и т.д. Однако отсутствие алгебраического решения уравнений высших степеней (т.е. алгебраического выражения, составленного из коэффициентов заданного уравнения, которое, будучи подставленным вместо неизвестного, тождественно удовлетворяло бы данному уравнению) оставалось темным пятном в теории уравнений.

Исследования шли двумя путями. Во-первых, определялись более широкие классы уравнений, позволяющих найти алгебраическое решение. Другими словами, определялись условия, при которых уравнения имели алгебраическое решение. Во-вторых, разрабатывались методы, которые позволяли найти приближенное решение, т.е. найти такое прагматическое число, которое, будучи подставленным вместо неизвестного в конкретное уравнение, давало бы в результате число, достаточно близкое к нулю. Наиболее распространенными методами приближенного решения уравнений были метод Виета и метод Ньютона — Рафсона.

Другой тип вычислительных задач, который поставила математика, заключался в вычислении приближенных значений функций, заданных с помощью определенных формул. Сюда, прежде всего, относятся задачи на нахождение численных значений математических функций с помощью конечных сумм степенных рядов. Конкретные численные результаты вычислений являлись прагматическими числами.

Для построения числовых таблиц широко использовались методы конечных разностей, а также всевозможные интерполяционные формулы. Сами же таблицы состояли из прагматических чисел.

Исчисление конечных разностей состоит, по сути дела, в исследовании отношений между значениями, которые принимают функции, когда их аргумент или аргументы изменяются на равные интервалы. Поэтому названная математическая дисциплина, а вместе с тем и интерполирование возникли, как только начали составлять более значительные по объему числовые таблицы. Основные формулы ее содержались и применялись уже в «Логарифмической арифметике» Г. Бригса (1624) и в продолжившей ее «Британской тригонометрии» Г. Гиллебранда (1633), а также в таблицах солнечных склонений, приведенных Г. Мутоном в «Наблюдениях видимых диаметров Солнца и Луны» (1670). Однако развитие теоретической части этой дисциплины, по существу, относится уже к следующему столетию. Ньютон в «Началах» (1687) и в «Методе разностей» (1711) опубликовал полученные им шесть интерполяционных формул, а именно так называемые формулы для интерполирования вперед, назад и на середине, как для равноотстоящих, так и для неравно-отстоящих абсцисс. Само слово «интерполяция» впервые применил Валлис в «Арифметике бесконечных» (1656).

Ряд вычислительных задач поставила экспериментальная физика, основные проблемы которой были связаны с установлением эмпирических физических законов. Под эмпирическим физическим законом понимается конкретная математическая зависимость между физическими характеристиками. Для построения эмпирического закона необходимо иметь набор измерений наблюдаемых характеристик. В процессе построения этого закона решаются следующие задачи:

– выбор формы математической зависимости между характеристиками,
– нахождение количественных значений параметров математической зависимости.

С подобными задачами математики не сталкивались до интеллектуальной революции, которая произошла в XVII в. Примерами эмпирических законов служат законы Кеплера, закон Галилея – свободного падения тел. При решении этих задач используются прагматические числа.

Среди важных нововведений в решении практических задач в XVII столетии необходимо отметить одно, принадлежащее Лейбницу, который интересовался всеми математическими проблемами, попадающимися ему на глаза. Здесь имеется в виду усовершенствование вычисления сложных процентов, ставшее возможным благодаря логарифмам, и правильное математическое обоснование вычисления рент. В своей статье об учете (1683) он привел и доказал правильность формул указанных расчетов.

Тип математики, которая оперирует прагматическими числами, мы будем называть *прагматической математикой*. Прагматическая математика находится в одном ряду с другими типами математик: прематематикой, теоретической математикой, полуматематикой. Эти типы математик различаются прежде всего видами чисел, с которыми они имеют дело.

Теоретическая математика и полуматематика оперируют *математическими числами*, в то время как прематематика – *прематематическими числами*, а прагматическая математика – *прагматическими числами*. Кроме того, если теоретическая математика и полуматематика являются, в целом, *непрерывными* математиками, то прематематика и прагматическая математика принципиально являются *дискретными* математиками.

Прагматические числа – это плод развития европейской математики, их нельзя встретить ни у греков, ни у индусов и мусульман.

Прагматические числа по своей сути принципиально отличаются от прематематических и математических чисел. Прематематические числа отражают количественную сущность множества реальных объектов или количественную степень обладания определенным свойством реального объекта, в то время как прагматические числа являются просто наборами символов, которые преобразуются по определенным правилам. Математические числа отличаются от прагматических чисел тем, ибо существуют такие математические числа, которые нельзя записать с помощью конечного набора цифр.

Из приведенного описания характерных черт прагматической математики следует, что эта математика не могла возникнуть ни из греческой математики, ни из греческой прематематики (логистики), т.е. она является чисто европейским произведением.

Математику XVII-XVIII вв. можно сравнить с мощной торговой фирмой, которая совершает многочисленные торговые сделки и приносит внушительную прибыль, но из-за неправильной постановки дела стоит на грани банкротства. Разумеется, ни покупатели (ученые, потребляющие «математические товары»), ни кредиторы (общество, которое без колебаний вкладывает средства в развитие математики) не знали об истинном финансовом положении «фирмы».

М. Клайн

Глава 7. Математика в XVIII столетии.

Пять великих геометров, Клеро, Эйлер, Даламбер, Лагранж и Лаплас, разделили между собой тот мир, существование которого открыл Ньютон. Они исследовали его во всех направлениях, проникли в области, которые считались недоступными, указали множество явлений в этих областях, которые еще не были открыты наблюдением, и, наконец, - в этом их вечная слава – они охватили с помощью одного принципа, одного-единственного закона самые тонкие и таинственные явления в движении небесных тел. Таким образом, геометрия осмелилась распоряжаться будущим, и ход будущих столетий только подтвердит во всех подробностях заключения науки.

Араго, «Похвальная речь о Лапласе» (1842)

(Под геометрией в XVIII в. во Франции понимали математику вообще)

Восемнадцатое столетие окрестили Героическим веком в истории математики, потому что именно тогда математики дерзнули совершить столь небывалые по своим масштабам и значению научные завоевания, пользуясь столь слабым логическим оружием.

М. Клайн

7.1. Европейская теоретическая математика в XVIII столетии.

Прежде чем описывать развитие теоретической математики в XVIII веке, сделаем несколько общих замечаний. *Одно замечание* касается творческой атмосферы среди математиков из этого века. Трудно найти более точное описание этой атмосферы, нежели у Ф. Клейна в его «Лекциях о развитии математики в XIX столетии»:

«Какое чувство восхищения возбуждает небольшая группа избранников, которая представляла нашу науку в XVIII столетии! Свободные от национальной ограниченности, в тесном интеллектуальном общении, поддерживаемые путем оживленного обмена мыслей в личной переписке, эти академики сочетают плодотворнейшее научное творчество с идеальным всесторонним развитием своей личности. Одной из характерных черт в этой картине является то, что ученый того времени обладал обширнейшими познаниями и вне собственной области и всегда чувствовал живую связь своей работы с развитием науки как целого. …

Стремление к универсальности, свойственное этой эпохе, выходит за пределы науки и ищет связи со всеми культурными ценностями, с религией, искусством и философией. Во всем чувствуется стремление к великой цели усовершенствования человечества» (Ф. Клейн, 1, с. 32).

Другое замечание относится к развитию математического образования в XVIII веке. Это столетие характеризуется значительным прогрессом математического образования в сравнении с предыдущими веками. Хотя в университетах физико-математические факультеты еще не были выделены из философских или факультетов искусств, но элементарные математические курсы, читавшиеся в ряде университетов, теперь были дополнены разделами аналитической геометрии и анализа. Впрочем, слушатели этих лекций насчитывались единицами. Во Франции, да и в других странах, важную роль в подготовке ученых в это время играли военные, военно-инженерные, морские школы, математические программы которых нередко превосходили по содержанию и объему университетские курсы.

Во время Французской революции в 1794 г. были организованы высшие учебные заведения нового типа – Политехническая и Нормальная школы. Политехническая школа давала чрезвычайно высокую теоретическую подготовку будущим инженерам, а Нормальная школа должна была готовить высококвалифицированных педагогов. К преподаванию в них были привлечены лучшие французские ученые. Практически все выдающиеся математики Франции вышли в последствии из этих школ.

В XVIII веком происходит и реформа учебной литературы по математике. Если изложение в учебных руководствах прежних веков носило, как правило, догматический характер и ограничивалось рецептами и примерами построений и вычислений, то главной отличительной чертой новых учебных пособий было желание пропитать обучение духом математического метода, добиваясь от учащихся не только запоминания, но и понимания предложений и правил.

По сравнению с XVII в. значительно увеличился выпуск периодической литературы. Здесь первое место принадлежало академиям. Специальные математические журналы начали появляться в последней четверти этого столетия, поэтому в самом начале рассматриваемого периода статьи по математике печатались вместе с другими в общих академических записках. Академии наук поддерживали между собой постоянную научную связь. Переписку вели по должности непременные секретари, а также корреспонденты академий, которые сообщали научные новости.

Если в XVII веке многие важнейшие открытия в математике были сделаны Непером, Ферма, Декартом, Паскалем, Лейбницем и целым рядом других лиц, для которых математика не была профессией, а иногда не являлась и главным делом, то в XVIII веке математики становятся профессионалами и притом государственными служащими – академиками или преподавателями. Профессионалы должны были преподавать или публиковать определенное количество книг или статей. Математики-любители, игравшие раньше значительную роль, практически полностью исчезают со сцены.

Началом нового века в математике можно считать появление около 1730 г. первых работ Л. Эйлера и Д. Бернулли. В истории математики наступила новая эпоха: ученые стали в меньшей мере философами, чем во времена Декарта или Лейбница, в науке усилилась специализация. Теперь главным математическим объектом стала функция, а не число, о чем свидетельствует развитие в XVIII веке теории дифференциальных уравнений и вариационного исчисления.

Основные достижения XVIII века в европейской математике связаны, в основном, с развитием математического анализа и его частей. Хотя в методологическом плане этот век мало дал европейской математике, однако в содержательном плане ее развитие было впечатляющим. Произошло разветвление математического анализа на несколько наук. От интегрального и дифференциального исчисления отделилась теория дифференциальных уравнений, которая, в свою очередь, разделилась на учение об обыкновенных дифференциальных уравнениях и уравнениях с частными производными, вариационное исчисление, теорию специальных функций и начала теории комплексного переменного. Быстро возникает значительное число новых фундаментальных математических понятий, которые тут же становятся объектом математических исследований. К таким понятиям можно отнести понятия ряда, частных производных, обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных и т.д. Появление новых математических понятий и использование их как объектов исследования существенно расширило поле для математических исследований. Это позволило показать себя плеяде блестящих математиков, среди которых можно выделить Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, Д. Бернулли, Ж. Даламбера, П. Лапласа. Полученные ими и другими математиками результаты позволили существенно расширить границы математики, а также и физики, где они нашли свое основное приложение.

Развитие математики в XVIII столетии происходило в основном в континентальной Европе. Над английской наукой тяготела традиция почитания Ньютона, и его обозначения, неуклюжие по сравнению с обозначениями Лейбница, затрудняли прогресс.

«Есть сходство между английской математикой восемнадцатого века и античной математикой после александрийской эпохи. В обоих случаях неподходящие обозначения технически затрудняли прогресс, а причины того, что математики ими удовлетворялись, были более глубокого общественного характера» (Д.Я. Стройк, 1, с. 176).

Развитие математики было тесно связано с развитием теоретической физики, которая в том столетии была в основном сосредоточена на развитии механики, а более точно – небесной механики. Классическим трудом в этой области была книга Лагранжа «Аналитическая механика» (1788). Связь математики и механики прослеживается из следующих слов автора в предисловии:

«В этой работе вы не найдете рисунков. Излагаемые мною методы не нуждаются ни в построениях, ни в рассуждениях геометрического или механического характера, а лишь в алгебраических операциях, подчиняющихся строгим и однообразным правилам. Тот, кто любит математический анализ, с удовольствием увидит, что механика становится новым разделом анализа, и будет мне благодарен за такое расширение области его применения».

В «Аналитической механике», которая появилась через сто лет после «Начал» Ньютона, вся мощь усовершенствованного анализа использована в механике точек и твердых тел. Достижения Эйлера, Даламбера и других математиков восемнадцатого столетия здесь обработаны и развиты на единой основе. Благодаря полному использованию вариационного исчисления самого Лагранжа оказалось возможным объединить различные принципы статики и динамики.

Перу Лагранжа принадлежат два фундаментальных труда по теории функций: «Теория аналитических функций» (1797) и «Лекции по исчислению функций» (1801). Эти книги являются попыткой подвести надежный базис под анализ, сводя его к алгебре.

В это время развивались и традиционные отрасли греческой математики: геометрия, арифметика и алгебра. В этих старых отраслях стали все шире применять методы математического анализа. С помощью новых методов, которые принес математический анализ, перечисленные выше и другие ученые получили в этих областях ряд замечательных результатов, изложение которых можно и сегодня найти в различных учебниках. Однако все же традиционные отрасли математики были относительно «не в моде».

К концу XVIII века все образованные люди рассматривали математику как нечто абсолютно верное (истинное), чуть ли не как божественное откровение, как язык, на котором Бог создал план Вселенной, основанный на евклидовой геометрии. Задача ученых – раскрыть этот божественный план.

«К концу XVIII в. математика была подобна гигантскому дереву, прочно стоявшему на почве реальности, с корнями двухтысячелетней давности, с раскидистыми ветвями. Высоко вздымалось древо математики над всеми областями человеческого знания. Никто не сомневался, что в таком виде это дерево будет жить вечно – разве что крона его будет становиться пышнее» (М. Клайн, 1, с. 82).

Никто не подвергал сомнению, что физическое пространство Вселенной является, по существу, евклидовым пространством, где все подчиняется аксиомам евклидовой геометрии, которые выражают абсолютные истины. Обожествление математики достигло своего апогея в работах различных философов XVIII века. В частности, И. Кант, продолжая традицию, идущую от Р. Декарта, писал:

«Так как во всяком учении о природе имеется науки в собственном смысле лишь столько, сколько имеется в ней априорного познания, то учение о природе будет содержать науку в собственном смысле лишь в той мере, в какой может быть применена в нем математика».

В своей книге «Критика чистого разума» Кант утверждает, что пространство и время представляют собой разновидности интеллектуального познания, посредством которых разум созерцает опыт. Мы воспринимаем, организуем и сознаем наш опыт в соответствии с этими формами интеллектуального познания. Опыт входит в них, как тесто в формочки для печенья. Разум накладывает формы познания на полученные им чувственные восприятия, вынуждая те подстраиваться под заложенные в нем схемы. Так как интуитивное представление о пространстве берет свое начало в разуме, некоторые свойства пространства разум принимает автоматически на подсознательном уровне.

Основные аксиомы геометрии Кант называет априорными искусственными истинами. Они составляют неотъемлемую часть нашего интеллектуального багажа. Геометрия занимается изучением лишь логических следствий из таких утверждений. Уже одно то, что интеллект созерцает опыт через изначально присущие ему «пространственные структуры», означает, что опыт согласуется с априорными синтетическими истинами и теоремами. Порядок и рациональность, которые мы, как нам кажется, воспринимаем во внешнем мире, в действительности проектируются на внешний мир нашим интеллектом и формами нашего мышления. В частности, упорядочивание пространственных ощущений по образу и подобию евклидовой геометрии является единственным, которое может допустить наш интеллект.

Философия Канта еще больше укрепила уверенность в могуществе математики, основанием для которого прежде всего служила красота, логическая непротиворечивость, аксиоматичное построение евклидовой геометрии и очевидность основных утверждений арифметики целых чисел. Кроме того, в научной общественности бытовало ощущение (даже более, существовала уверенность), что с помощью математики можно не только описывать существующее состояние физических явлений, но и предсказывать их будущие состояния. Достаточно вспомнить известное высказывание Лапласа:

«Ум, который знал бы все действующие в данный момент силы природы, а также относительное положение всех составляющих ее частиц, и который был бы достаточно обширен, чтобы все эти данные подвергнуть математическому анализу, смог бы охватить единой формулой движение как величайших тел вселенной, так и ее легчайших атомов; для него не было бы ничего неопределенного, он одинаково ясно видел бы и будущее, и прошлое. То совершенство, какое человеческий разум был в состоянии придать астрономии, дает лишь слабое представление о таком уме».

Однако с логическим обоснованием математики, точнее, полуматематики, дело обстояло достаточно плохо. Как мы уже говорили, до начала второго периода развития математики, т.е. до начала XVII века, единственной логически обоснованной отраслью математики была геометрия. Не существовало логического обоснования арифметики. Введение в рассмотрение отрицательных, а затем и иррациональных чисел внесло разброд в ряды математиков, причем часть из них просто не признавала законность использования новых типов чисел из-за отсутствия определенной степени наглядности. Подобная ситуация продолжалась и в период европейской математики, однако, возможно, с меньшим накалом, ибо новые типы чисел уже «постарели», стали более привычными и иногда казались даже вполне естественными.

Создание математического анализа и его бурное развитие поставило новые проблемы. Дело в том, что ни Ньютон, и ни Лейбниц, как мы уже говорили выше, не дали строго логического обоснования его основ, в частности, строгих определений вводимых понятий, таких, как производная или дифференциал. Отсутствие строгих и четких определений существенно затрудняло их единообразное понимание другими математиками и часто приводило к получению противоречивых результатов. Если применение новых типов чисел не приводило к противоречиям, то применение дифференциального и интегрального исчисления, бесконечных рядов и других разделов математического анализа рождало противоречия. В качестве примера можно привести развитие и применение бесконечных рядов, где большое значение имели работы взгляды великого математика Л. Эйлера, посвященные сходимости и расходимости рядов. В этих работах встречаются и ошибочные результаты. Сказанное относится не только к Л. Эйлеру, но и к другим математикам его времени.

Проблемы, связанные с логическим обоснованием математического анализа, тревожили всех крупных математиков этого периода. Начиная с Ньютона и Лейбница, были предприняты многочисленные попытки найти обоснование основным понятиям математического анализа. Среди этих попыток можно указать работы Эйлера и Лагранжа, а также конкурс Берлинской академии в конце XVIII века. Интересно содержание условий конкурса.

«Своими предложениями, всеобщим уважением и почетным титулом образцовой “точной науки” математика обязана ясности своих принципов, строгости своих доказательств и точности своих теорем.

Для обеспечения непрестанного обновления столь ценных преимуществ этой изящной области знания необходима ясная и точная теория того, что называется в математике бесконечностью.

Хорошо известно, что современная геометрия (математика) систематически использует бесконечно большие и бесконечно малые величины. Геометры античности и даже древние аналитики всячески стремились избегать всего, что приближается к бесконечности, а некоторые знаменитые аналитики современности усматривают противоречивость в самом термине бесконечная величина.

Учитывая сказанное, Академия желает получить объяснение, каким образом столь многие правильные теоремы были выведены из противоречивого предложения, вместе с формулировкой точного, ясного, короче говоря, истинно математического принципа, который был бы пригоден для замены принципа бесконечного и в то же время не делал приводимые на его основе исследования чрезмерно сложными или длинными. Предмет должен быть рассмотрен во всей возможной общности и со всей возможной строгостью, ясностью и простотой».

Из этого объявления следует, в частности, то, что и в конце XVIII века слово «геометрия» была, по существу, синонимом слова «математика». Кроме того, само появление этого объявления свидетельствует о глубокой озабоченности математической общественности положением внутри математического анализа.

Ситуацию в обосновании математического анализа в конце XVIII века хорошо выразил М. Клайн:

«Итак, XVIII век закончился, оставив обоснование дифференциального и интегрального исчисления и высших разделов математического анализа в крайне неудовлетворительном состоянии. Без преувеличения можно сказать, что к началу XIX века ситуация с обоснованием математического анализа выглядела гораздо хуже, чем в канун XVIII века. Гиганты науки, главным образом Эйлер и Лагранж, дали неверные обоснования анализа. А поскольку их авторитет был чрезвычайно велик, многие из их коллег воспринимали и некритически повторяли все, что делали корифеи, и даже пытались строить новые теории на возведенных теми ложных основаниях. Другие, менее доверчивые, не были удовлетворены тем, что предлагали Эйлер и Лагранж, но надеялись достичь полного обоснования путем незначительных поправок и дополнений. Нужно ли говорить, что они стояли на неверном пути» (М. Клайн, 1, с.177).

Одна из основных причин создавшегося положения является следствием, как мы уже говорили выше, того, что в математику вошло значительное количество абстрактных понятий, взаимосвязанных и оторванных от непосредственного опыта. Новые понятия отличались от старых большей тонкостью, и заложить аксиоматический фундамент в этой ситуации было совсем непросто. Создание новых понятий в первую очередь было связано с постановкой и с решением физических проблем.

Постигнув суть физической проблемы в той или иной ее математической постановке, математики не могли устоять перед соблазном формул, которые, по-видимому, в их глазах обладали притягательной силой. Этот процесс вывода одной формулы из другой с помощью какой-либо формальной процедуры (например, дифференцирования) доставлял им удовлетворение. XVIII век иногда называют Героическим веком в истории математики, потому что именно тогда математики совершили небывалые по своим масштабам и значительности научные завоевания, пользуясь столь слабым логическим оружием.

Возникает вопрос: почему математики были уверены в правильности полученных ими результатов, хотя они прекрасно понимали, что основные понятия математического анализа сформулированы недостаточно ясно, а качество их доказательств было на довольно низком уровне. Здесь можно привести две причины. Одна заключалась в том, что выводы из теорий часто подтверждались результатами опытов или наблюдений. Второй причиной являлось то, что математики были убеждены: мир сотворен Богом на основе математических принципов, а они призваны постепенно раскрывать планы Творца. Однако в конце XVIII века естествоиспытатели (в том числе и французские энциклопедисты) отказались от идеи о божественном плане творения, что было результатом европейского Просвещения. Утратив столь мощную идеологическую поддержку, математики сочли своим долгом критически пересмотреть полученные ранее результаты – и обнаружили нечетко сформулированные понятия, отсутствие доказательств в одних случаях и неадекватность существующих доказательств в других, противоречия и полную неразбериху в том, что правильно или неправильно в полученных результатах. В конечном итоге, было неясно, каким теоремам и в какой степени можно доверять и использовать их при получении новых математических результатов.

Подводя итог, можно сказать, что в конце XVIII века сложилась парадоксальная ситуация, когда успехи математики в предсказании и описании явлений природы были весьма внушительными, в то время как логика быстро расширяющейся математики находилась в плачевном состоянии. Об этом хорошо сказал известный математик Ф. Клейн:

«Исторически идеал “строгости” не всегда имел одинаковое значение для развития нашей науки; в зависимости от условий эпохи роль его сильно менялась. В периоды неудержимого роста творческой продуктивности требование строгости часто отступало на задний план, уступая стремле-нию к возможно большому и быстрейшему обогащению научного достояния. В следующие затем периоды критики – периоды просеивания и очистки достигнутых приобретений – стремление к строгости начинало играть доминирующую роль. Вспомним эпоху возникновения дифференциального и интегрального исчислений в XVIII столетии, когда бурный полет творческой фантазии и страстная жажда открытий создали многое такое, что было не только недостаточно обосновано, но и оказалось впоследствии прямо неверным» (Ф. Клейн, 1, с. 83).

Поэтому одной из основных проблем, доставшихся XIX веку, была задача подвести прочный логический фундамент под те разделы математики, где он отсутствовал и исключить противоречия в тех понятиях, которые не имели четких определений.

Как мы уже неоднократно отмечали, математический анализ при своем рождении являлся и теоретической физикой. Два века, XVII и XVIII, в теоретической физике господствовала небесная механика, ибо со времен Вавилона и Египта изучение движения небесных тел было в центре человеческого любопытства и любознательности. После того, как на изучении механики сосредоточился почти весь выдающийся математический интеллект, стало казаться, что процесс разработки механики достиг своей кульминации. В своем письме к Даламберу в 1772 г. Лагранж писал:

«Не кажется ли Вам, что высшая геометрия близится отчасти к упадку; ее поддерживают только Вы с Эйлером».

Сложность оставшихся задач в механике вынуждала математиков вновь обратиться к старым областям исследований: к алгебре и теории чисел. Показательным фактом в указанном направлении является развитие теории чисел, что ярко выразил известный русский математик П.Я. Чебышев:

«Эйлером положено начало всех изысканий, составляющих общую часть теории чисел. В этих изысканиях Эйлеру предшествовал Ферма; он первый начал заниматься исследованием свойств чисел в отношении их способности удовлетворять неопределенным уравнениям того или другого вида, и результатом его изысканий было открытие многих общих теорем теории чисел. Но изыскания этого геометра не имели непосредственного влияния на развитие науки: его предложения остались без доказательств и приложений. В этом состоянии открытия Ферма служили только вызовом геометров на изыскания в теории чисел. Но, несмотря на весь интерес этих изысканий, до Эйлера на них никто не вызывался. И это понятно: эти изыскания требовали не новых приложений приемов, уже известных, и новых развитий приемов, прежде употреблявшихся; эти изыскания требовали создания новых приемов, открытия новых начал, одним словом, основания новой науки. Это сделано было Эйлером» (П.Л. Чебышев, 1, т.1, с. 10).

Так появилась новая теория чисел, основанная на математическом анализе и оказавшаяся в центре внимания ряда крупнейших математиков.

Если математический анализ в целом являлся прикладной математикой, то теория чисел может служить примером чистой математики. Если в XVII веке доля чистой математики в общем развитии математики была незначительной, то в следующем столетии доля чистой математики существенно возросла.

Начало XVIII века ознаменовалось посмертной публикацией «Искусства предположений» Я. Бернулли, где был подведен итог разработанной ранее теории вероятностей и высказан закон больших чисел, оказавший сильнейшее влияние на последующее развитие теории вероятностей. XVIII столетие в разработке теории вероятностей закончилось уже в XIX веке «Аналитической теорией вероятностей» Лапласа. Ввиду того, что предметом теории вероятностей являются случайные события и случайные величины, многие математики не воспринимали ее как математическую дисциплину. В целом в этом столетии теория вероятностей занимала довольно скромное место и в системе математических наук и в умах математиков, несмотря на такие выдающиеся достижения, как закон больших чисел Я. Бернулли, предельные теоремы Муавра, различные результаты Д. Бернулли, Лапласа и еще нескольких математиков.

Поле приложений вероятностных методов было ограниченным. Успешное применение эти методы нашли лишь в страховом деле и в отдельных вопросах демографии. В математическом естествознании почти безраздельно господствовали дифференциальные уравнения, и в то время трудно было думать, что вероятностные методы когда-либо получат распространение в физике, а тем более – в механике. Попытки теоретико-вероятностного анализа ошибок наблюдения были, пожалуй, единственным употреблением этих методов в науках о природе. Недостаточно ясными оставались представления об условиях применимости методов изучения случайных явлений, ибо самые исходные понятия теории вероятностей не были точно и недвусмысленно определены.

Сколько будет один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один?
— Не знаю, ответила Алиса.— Я сбилась со счета.
— Она не умеет складывать.

Л. Кэрролл

7.2. Прагматическая математика в XVIII веке.

Если прагматическая математика, по существу, родилась в XVII веке, то ее становление, оформление и развитие произошло только в следующем, XVIII веке. Прежде всего это определялось необходимостью решения практических задач, связанных с небесной механикой и практической астрономией. В качестве примера можно привести проблему определения долготы в открытом море. В 1733 г. английский парламент назначил премию в 20.000 фунтов стерлингов за удовлетворительное решение этой проблемы, хотя бы с точностью до полградуса. Наиболее распространенным ориентиром служило местоположение Луны относительно Солнца или неподвижных звезд. Гёттингенский астроном Тобиас Майер, используя методы Эйлера и собственные наблюдения, в 1753 г. составил лунные таблицы, которые широко применялись мореплавателями еще более ста лет и с 1767 до 1915 года. Включались в морские справочники. Еще одним примером астрономических расчетов может послужить событие, которое является одним из самых драматических моментов в истории математики. Этим событием явилось предсказание А. Клеро даты появления кометы Галлея. На заседании Парижской академии наук 14 ноября 1758 г. он предсказал, что комета Галлея пройдет ближайшую к Солнцу точку своей орбиты в середине апреля 1759 года с возможной ошибкой в тридцать дней. Комета появилась на месяц раньше срока.

Различные академии наук специально поощряли исследования по прагматической математике, организуя международные конкурсы и назначая высокие премии за лучшие работы. Таковыми были конкурсы по вычислению движения планет и комет, неоднократно объявлявшиеся Парижской и Петербургской академиями, а также целый ряд конкурсов по кораблестроению и кораблевождению, компасному делу и т.п. В качестве еще одного примера добавим работы Эйлера по расчету реактивных водяных турбин.

В XVIII веке физики-экспериментаторы усиленно занимались поиском экспериментальных физических законов. В качестве примера можно привести закон Кулона о взаимодействии двух электрических зарядов.

Для нахождения математической формы этих законов широко применялись различные методы обработки наблюдений. В частности, эти методы использовались для нахождения количественных значений универсальных постоянных, используемых в математическом представлении законов. В качестве примера можно привести установление Кавендишем универсальной гравитационной постоянной в законе всемирного притяжения Ньютона.

Хотя элементы теории ошибок были сформулированы еще Галилеем в связи с требованиями астрономии, но основное продвижение в этом направлении было сделано только в XVIII веке. После Ньютона фундаментальной научно-практической задачей явилась задача определения фигуры Земли по астрономо-геодезическим измерениям. Эта задача, связанная и с более непосредственными нуждами картографирования обширных территорий, привела к дальнейшим работам в области математической обработки измерений. Первоначальные идеи в этом направлении принадлежат Р. Коутсу, который изложил их в статье «Оценка погрешностей в прикладной математике с помощью изменений элементов плоского и сферического треугольника» (1722). В конце этой статьи он рекомендовал употреблять при обработке непосредственных измерений среднее арифметическое, дав определенное правило для учета весовых измерений и сравнив общее среднее с центром тяжести системы точек – результатов измерений.

Работы Т. Симпсона и И.Г. Ламберта заложили основы теории ошибок, связав ее с теорией вероятностей. Взяв определенное распределение вероятностей, Симпсон доказал, что при этом распределении среднее арифметическое в вероятностном смысле предпочтительнее отдельного измерения. Тем самым он дал первое обоснование широко применявшемуся в астрономии среднему арифметическому. Ламберт описал вероятностные свойства ошибок наблюдений, дал правила оценки их точности и подбора параметров эмпирических прямых и кривых по точкам – наблюдениям, отягощенным случайными погрешностями. Он также сформулировал цели теории ошибок (этот термин был тоже предложен им).

Исследования по теории ошибок продолжались на протяжении последующих десятилетий в работах Ж. Лагранжа, Р. Бошковича, Л. Эйлера, Д. Бернулли и П. Лапласа. Классическая теория ошибок была завершена в следующем столетии в работах П. Лапласа, А. Лежандра и Ф. Гаусса.

Основные проблемы статистики народонаселения (или, как было принято говорить, политической арифметики), т.е. проблемы рождаемости, смертности и т.д., а также связанные с ними проблемы подсчетов для страхования жизни и вычислений стоимости пожизненных рент оказались важнейшими приложениями теории вероятностей в XVIII веке. Решение этих задач привело к созданию математической статистики.

Само слово «статистика» появилось в немецкой школе государствоведения в XVIII веке и сначала означало общее описание стран, включавшее и некоторые числовые данные. Впрочем, в сочинениях этого времени подчас трудно разделить теорию вероятности и математическую статистику. Историческую близость теории вероятностей и математической статистики можно иллюстрировать тем, что «классическая» вероятность события (отношение числа благоприятных случаев к общему числу всех равновозможных случаев) применялась наравне с частотной, статистической вероятностью события (т.е. наблюдаемой относительной частотой события). Хотя формальным определением служило только первое, практически применялись оба определения. Более того, именно сочетание этих определений вероятности, попытки установить классическую вероятность по наблюдаемой частоте и оценить возможные уклонения последней от предсказанной на основе классической вероятности частоты служили основой для развития теории вероятностей.

В целом теория вероятностей занимала в XVIII веке довольно скромное место в системе математических наук, так как в математическом естествознании почти безраздельно господствовали дифференциальные уравнения, и в то время трудно было предположить, что вероятностные методы когда-либо получат распространение в физике, а тем более в механике.

Решение прикладных задач с помощью математического анализа требовало перехода от непрерывных функций к дискретным. Исследование функций при прерывном изменении аргумента, в частности, их интерполирование, велось издавна, но в отдельную математическую дисциплину исчисление конечных разностей, в котором специально изучаются функции с дискретно меняющимся аргументом, выделилось только в XVIII столетии. В этом исчислении оперируют с приращениями функций, которые соответствуют конечным приращениям аргумента.

Во второй половине XVIII века возникла новая постановка проблемы интерполяции, связанная с новым подходом к приближенному выражению функциональной зависимости. В применениях математического анализа вопрос не всегда сводится к нахождению аналитического выражения искомой зависимости в виде формулы. Даже в том случае, когда это выражение известно, оно может оказаться в силу своей сложности малопригодным для вычисления нужных частных значений аргумента. Для нужд практики в огромном большинстве случаев достаточно знать значения функции на достаточно «плотном» множестве точек, например, при значениях аргумента: x, $x+h$, $x+2h$,... при некотором малом приращении h. Поэтому возникает задача: заменить сложную функцию $f(x)$ другой – более простой функцией $g(x)$, значения которой, во всяком случае, при указанных значениях аргументов, были бы достаточно близки к значениям $f(x)$. В частности, задача может ставиться так: найти многочлен от x степени не выше n, который совпадает с заданными значениями $f(x)$в $n+1$ точках. Принципиальные результаты в исследовании проблемы интерполяции в указанной постановке получил Лагранж.

Широкое распространение в Европе в конце XVIII века получили арифметические, тригонометрические и логарифмические таблицы. Банки и ссудные кассы применяли таблицы процентов; а страховые компании – таблицы смертности. Однако для Англии большое значение имели астрономические и навигационные таблицы. В 1776 г. Маскелин, ставший впоследствии королевским астрономом, выпустил «Морской календарь», представляющий собой свод астрономических, навигационных и логарифмических таблиц. Первое издание календаря готовилось с большой тщательностью, которую не знало до сих пор ни одно издание. И тем не менее в нем содержалось значительное число ошибок – результат недостаточно точных исходных данных, просчетов в вычислениях, ибо расчеты проводились вручную, и описок при переписывании. «Морской календарь» выходил ежегодно, и каждое издание требовало огромного труда значительного количества вычислителей.

Интересный способ организации вычислительных работ предложил во Франции маркиз де Прони. Прони организовал работы как бы по конвейерной системе. Он разбил всех вычислителей на три группы. В первую группу входило 5 или 6 математиков (в нее, в частности, входил М.Лежандр), которые выбирали наиболее пригодные методы и формулы, а также составляли схемы расчетов. Вторая группа состояла из 7 или 8 вычислителей, которые по выбранным формулам определяли значения функций с шагом в 5 или 6 интервалов. Третья группа включала в себя 90 вычислителей более низкой квалификации, которые «уплотняли» таблицы, т.е. заполняли интервалы между вычисленными на предыдущем этапе значениями функций.

В конце XVIII века Г. Монж создал начертательную геометрию, которая до Французской революции применялась в военном деле для расчета фортификационных укреплений, а уже во время и после революции преподавалась во многих школах для подготовки инженеров. В своей книге «Начертательная геометрия» (1799) Монж так определил основные цели и задачи этой дисциплины:

> «Первая [цель] – точное представление на чертеже, имеющем только два измерения, объектов трехмерных, которые могут быть точно заданы. Вторая цель начертательной геометрии – выводить из точного описания тел все, что неизбежно следует из их формы и взаимного расположения».

Для Монжа начертательная геометрия была прежде всего графическим методом, позволяющим упростить решение многих практических задач, возникающих в топографии, в конструировании машин и механизмов, в описании технологических процессов и т.п. Поэтому роль начертательной геометрии для развития машиностроения трудно переоценить, ибо она стала основой всех инженерных производственных чертежей.

«Первая – точное представление на чертеже, имеющим только два измерения, объектов трехмерных, которые могут быть точно заданы. Вторая цель начертательной геометрии – выводить из точного описания тел все, что неизбежно следует из их формы и взаимного расположения».

Для Монжа начертательная геометрия была, прежде всего, графическим методом, позволяющим упростить решение многих практических задач, возникающих в топографии, в конструировании машин и механизмов, в описании технологических процессов и т.п. Поэтому роль начертательной геометрии для развития машиностроения трудно переоценить, ибо она стала основой всех инженерных производственных чертежей.

Разве математики, столь чувствительные в вопросах религии, столь же скрупулезно придирчивы в своей науке? Разве не полагаются они на авторитет, принимая многое на веру, и разве не веруют они в вещи, непостижимые для разума? Разве нет у них своих таинств и, более того, своих несовместимостей и противоречий?

Дж. Беркли, «Аналитик»

Глава 8. Математика в XIX веке и в первой трети XX века.

8.1. Несколько общих замечаний.

Начало XIX столетия в Европе проходит под сильным влиянием Французской революции и наполеоновских войн, которые открыли путь уже для промышленной революции на территории европейского континента. Промышленная революция побуждала к занятиям физическими науками, создала новые общественные классы с новыми взглядами на жизнь, заинтересованные в науках и в техническом образовании. В академическую среду ворвались демократические идеи, устаревшие формы мышления вызывали критику, прошли реформы школьного и университетского образования.

В начале века новая и разнообразная теоретико-математическая деятельность была вызвана не техническими проблемами, поставленными новой промышленностью, ибо развитие промышленности происходило, по существу, по английскому образцу. Англия, родина промышленной революции, в течение нескольких десятилетий оставалась математически бесплодной, что служило яркой иллюстрацией того, что эта революция не нуждалась в математике. Более всего теоретическая математика в то время развивалась во Франции, и несколько позже – в Германии. В этих странах основной причиной расцвета теоретической математики являлись реформы университетского и школьного образования, которые потребовали значительного расширения контингента университетских преподавателей и школьных учителей. Занятия теоретической наукой в целом становились все более далекими от требований экономики или военного дела. Сформировался специалист, заинтересованный в науке ради нее самой.

«В девятнадцатом столетии мы уже не находим математиков при королевских дворцах или аристократических салонах. Быть членами ученых академий уже не составляет их главное занятие – обычно они работают в университетах или технических школах и являются преподавателями столько же, как и исследователями. Бернулли, Лагранж и Лаплас преподавали лишь от случая к случаю. Теперь же ответственность преподавателя возрастает, профессора математики становятся воспитателями и экзаменаторами молодежи. Упрочение связей между учеными в пределах одной нации приводит к подрыву интернационализма предыдущих столетий, хотя международный обмен мыслями продолжается. Латинский язык науки постепенно заменяется национальными языками» (В.Я. Стройк, 1, с.190).

Общую ситуацию в теоретической математике хорошо описывает Ф. Клейн:

«Характер развития математики в XIX столетии совершенно иной. Прикладная математика не останавливается, конечно, в своем развитии; наоборот, она охватывает все более обширные новые области. Чтобы убедиться в этом, достаточно только напомнить о создании всей “математической физики”, т.е. нашего орудия теоретического исследования во всех областях физики, лежащих за пределами механики.

Но наряду с этим мощно развивается чистая математика, притом в равной мере в двух направлениях: с одной стороны, создаются совершенно новые области, как теория функций комплексного переменного и проективная геометрия; с другой – подвергаются критическому рассмотрению научные ценности, полученные по наследству от предшествующих поколений; это соответствует вновь пробудившемуся чувству строгости, которое отошло на второй план в изобиловавшем новыми открытиями XVIII столетии.

Наряду с этими новыми направлениями мысли на научную жизнь оказывают свое влияние те крупные общественные сдвиги, которые повлекла за собой французская революция и последовавшие за ней исторические события. Демократизация мировоззрения ведет к распространению культуры и строгой специализации отдельных ветвей науки. Соответственно с требованием времени приобретает важное значение преподавательская деятельность. Жизнь, не стесняемая более сословными различиями, создает совершенно немыслимый прежде наплыв лиц, стремящихся к научным занятиям и руководствующихся при этом совершенно новой целью – желанием подготовиться к преподавательской деятельности, которая получила теперь такое важное значение. Тем самым начинается перемещение центра тяжести научной жизни: главными центрами ее становятся теперь не академии, а высшие школы. Во Франции развитие в этом направлении, после первых шагов в Нормальной школе, начинается с Монжа и с основания Политехнической школы в 1794 г., в Германии – с Якоби, который в 1827 г. вызвал к жизни нечто аналогичное в Кенигсберге.

Под влиянием разнообразнейших и чрезвычайно разросшихся проблем начинается упомянутая уже специализация наук. Математика обособляется от астрономии, геодезии, физики, статистики и т.д.

Число специалистов математиков неизмеримо возрастает и заполняется представителями самых различных и отдаленных наций. При этом широком развитии отдельных исследований даже самый всеобъемлющий ум уже не в состоянии произвести в себе синтез всего материала и плодотворно проявить его вовне.

Вместо прежнего живого личного общения между учеными возникает огромная литература, особенно периодическая, устраиваются большие интернациональные конгрессы и другие организации, стремящиеся поддерживать хотя бы внешнюю связь.

Теперь в каждой культурной стране имеются сотни работающих математиков, каждый из которых владеет только очень небольшим участком своей науки, и этот уголок естественно представляется ему наиболее важным. Результаты своей работы он публикует в разрозненных отрывочных статьях, в разных журналах, на различных языках. Изложение, рассчитанное на немногих специалистов, работающих в той же области, не содержит и намека на связь с более крупными общими вопросами и поэтому с трудом доступно математику, круг интересов которого стоит несколько дальше, а для широкого круга читателей оно совершенно непригодно» (Ф. Клейн, 1, с. 31-32).

Совершенно другая ситуация сложилась в прагматической математике. Началом нового периода в ее истории можно, пожалуй, считать учреждение военных школ и академий в конце XVIII в. Такие школы, которые появились во Франции и вне ее (Турин, Вулвич), отводили значительное место обучению теоретической и прагматической математике как составной части подготовки военных инженеров. Карьера таких крупных математиков, как Лагранж, Лежандр, Лаплас, Монж, Карно начиналась в этих учреждениях. Важнейшим событием в этом направлении было основание в Париже в 1794 г. Политехнической школы для подготовки инженеров, которая стала образцом для всех технических и военных школ начала девятнадцатого столетия, включая военную академию в Вестпойнте в США.

Важной составной частью учебного плана Политехнической школы было преподавание теоретической и прагматической математики. Внимание уделялось как преподаванию, так и исследовательской работе. Лучшие ученые Франции были приглашены, чтобы помочь этой школе. Многие крупные французские математики были студентами, профессорами или экзаменаторами Политехнической школы.

Для обучения в технических школах потребовался и новый тип учебников и руководств. Некоторые из лучших учебников начала столетия были подготовлены для этих школ. Эти учебники оказали большое влияние и на дальнейшее развитие как прагматической, так и теоретической математики. Хорошим примером такого руководства является «Трактат дифференциального исчисления и интегрального исчисления» С.Ф. Лакруа, по которому целые поколения изучали математический анализ. Появление этой книги в Англии способствовало возрождению теоретической математики в этой стране.

Если еще в начале XIX века основными областями деятельности прагматической математики была небесная механика, статика, артиллерия и т.п., то с развитием промышленной революции, связанной с внедрением электричества, использование прикладной математики оказалось просто необходимым. С этого времени прагматическая математика становится обязательным инструментом научно-технического прогресса.

8.2. Развитие европейской теоретической математики.

В XIX век европейская теоретическая математика вступила с полной уверенностью в своем всемогуществе, которое было признано и философами, и учеными, занимающимися изучением природы. Первую трещину в фундамент всеобщей веры во всемогущество математики внесло открытие неевклидовых геометрий. Появление геометрии Лобачевского, отличающейся от геометрии Евклида, поставило вопрос о природе окружающего нас физического пространства и о том, аксиомам какой геометрии оно подчиняется.

Вопрос еще более усложнился, когда в середине XIX века Г. Риман предложил вниманию математической общественности еще одну геометрию, отличную от геометрий Евклида и Лобачевского. Уже одно появление противоречивых друг другу неевклидовых геометрий было большим ударом по господствующим среди математиков представлениям о строении физического пространства. Еще более сильный шок вызвала невозможность указать, какая из этих геометрий истинна, и даже установить, есть ли среди них истинная геометрия. Стало ясно, что математики сформулировали казавшиеся им правильные аксиомы геометрии, исходя из своего ограниченного опыта, и ошибочно сочли эти утверждения самоочевидными истинами. Другими словами, аксиомы евклидовой геометрии, рассматриваемые с точки зрения принадлежности к определенному типу интеллектуальных утверждений, являются только соглашениями.

Позже, в начале XX века, с созданием общей теории относительности оказалось, что и на основе геометрии Лобачевского можно построить достаточно разумную физическую теорию, которая до настоящего времени не была опровергнута ни экспериментальным, ни теоретическим путем. Это означает, что математика не может однозначно ответить на вопрос о природе физического мира. Более того, никакими чисто математическими средствами нельзя априорно определить пригодность или непригодность той или иной геометрии для описания физического мира.

Открытие непротиворечивых неевклидовых геометрий подорвало продолжавшуюся в течение многих веков веру в абсолютную истинность или справедливость базисных геометрических утверждений (аксиом) как выражение неких закономерностей природы. Но математикам было трудно сразу отказаться от веры в абсолютную истинность математических утверждений. Поэтому они в середине XIX века стали считать, что истина кроется в числах, которые составляют основу арифметики, алгебры и математического анализа. Ситуацию хорошо выразил крупный математик первой половины XIX века К. Якоби, который сказал, что «Бог всегда арифметизирует». Эта фраза знаменует конец эры геометрии в математике, когда слово «геометрия» была синонимом слова «математика», а символом этой поры были слова Платона, что «Бог является геометром».

С появлением неевклидовых геометрий начался бурный процесс алгебраизации математики. Этот процесс объяснялся тем, что во второй половине XIX века была замечена тесная связь между различными типами геометрий и определенными типами алгебраических объектов, которым дали название «группы». В достаточно полном виде эта связь была изложена в Эрлангенской программе Ф. Клейном. Поскольку тип геометрии задается с помощью определенной группы (алгебраического объекта), то изучение общих свойств геометрии тем самым сводится к изучению свойств алгебраических объектов, что означает первенство алгебры в современной математике. А с другой стороны, количество геометрий возрастает, поэтому на алгебраические объекты теперь можно смотреть как на геометрические, т.е. геометрический язык пронизывает математику. С момента появления Эрлангенской программы, во-первых:

«Классическая геометрия переросла себя и из самостоятельной науки превратилась в универсальный язык современной математики, обладающий исключительной гибкостью и удобством» (Н. Бурбаки).

Во-вторых, ее появление открыло дорогу к процессу алгебраизации математики.

Алгебраизация математики происходила сразу по нескольким направлениям. *Первое направление* связано с практически повсеместным использованием символьных языков, с помощью которых записывались различные формулы, характерные для соответствующей математической дисциплины. Это началось с использования буквенной записи алгебраических уравнений, затем продолжилось в развитии аналитической геометрии, математического анализа и связанных с ним математических дисциплин. В течение XIX века и позже практически все возникшие математические дисциплины использовали свои специфические символьные языки. В качестве примеров можно привести математическую логику и теорию множеств.

Второе направление алгебраизации связано с появлением того, что сегодня обычно называют современной алгеброй, т.е. математической дисциплиной, изучающей алгебраические структуры. Первыми такими алгебраическими структурами, которые стали усиленно изучать в XIX веке, были математические объекты, получившие имена «группа», «поле», «матрица». Позже, в конце XIX века и в первой трети XX века, эти понятия прочно обосновались в других математических дисциплинах, а кроме того — и в физике. Более того, алгебраический язык, содержащий и другие алгебраические понятия и методы, вошел в состав этих дисциплин.

Алгебраизация математики привела к тому, что во второй половине XIX века алгебра, наряду с математическим анализом, также стала прикладной наукой. Это было связано прежде всего с тем, что математический объект под названием «группа» получил четкое и ясное физическое истолкование. Понятие группы стало означать математический объект, характеризующий симметрию как собственно физического пространства, так и пространственных объектов (например, кристаллов). Роль этого понятия в физике резко возросла с того момента, когда в начале XX века оно стало одним из основных, лежащих в основе теории относительности.

Наконец, *третье направление* связано с продолжением и развитием собственно алгебры, то есть с теорией чисел и с вопросами решения алгебраических уравнений. Это направление, начиная с середины XIX века, сыграло большую роль в аксиоматическом обосновании теории чисел, к чему мы вернемся ниже.

Наряду с развитием геометрии и алгебры, рассматриваемый период характеризуется дальнейшими открытиями в области математического анализа и примыкающих к нему математических дисциплин, таких, как вариационное исчисление, теория дифференциальных уравнений, теория поля, математическая физика в целом и т.п. Это направление возникло в результате расширения языка математического моделирования, связанного с дальнейшим развитием физики, что составило содержание так называемой «математической физики». На основе нового языка удалось построить ряд физических теорий, описывающих собранные к тому времени новые физические факты, а также наблюдаемые на опытах физические явления.

Появление этих разделов математики с целым набором новых математических понятий позволило полностью перейти от словесных физических моделей к математическим моделям физических явлений. Более того, возникновение новых математических дисциплин часто вызывалось необходимостью построения математических моделей для описания физических явлений. В качестве одного из многих примеров можно привести появление математической теории поля, которая необходима для построения физической теории поля при описании физических явлений. Основной математический аппарат в этом случае состоял из дифференциальных уравнений в частных производных. В качестве другого примера можно взять возникновение теории относительности, которая могла появиться на свет только потому, что в необходимый период была, в частности, готова к применению новая область математических исследований, получившая название «тензорный анализ». Другими словами, математическое описание физических явлений стало нормой, и с этого времени физика полностью отказалась от словесных моделей.

Успехи применения математики в физике были настолько велики, что в сознании подавляющего большинства ученых укрепилась уверенность: с помощью математического языка можно адекватно описать все физические процессы, протекающие в природе. Эта уверенность и позволила А. Эйнштейну сказать следующее:

«Весь наш предшествующий опыт приводит к убеждению, что природа является осуществлением того, что математически проще всего себе представить. Я убежден, что чисто математическое построение позволяет найти те понятия и те закономерные связи между ними, которые дают ключ к пониманию явлений природы» (А. Эйнштейн, 2).

Как мы уже говорили выше, к началу XIX века в математическом анализе назрела острая необходимость уточнить все основные определения, а также «закрыть дыры» и исправить ошибки в доказательствах основных его теорем. Первым, кто серьезно начал эту работу, и труды которого оказали большое влияние на последующие поколения математиков, был О. Коши, который написал три учебника по математическому анализу. Хотя Коши заявил в последнем своем учебнике, что достиг мыслимых пределов строгости, он допустил немало ошибок, впрочем, вполне объяснимых, если учесть тонкость затронутых им понятий. Приведенные им определения функции, предела, непрерывности и производной были, по существу, правильными, но язык, которым он пользовался, не отличался ни ясностью, ни точностью. Коши был убежден, например, что из непрерывности следует дифференцируемость, и сформулировал множество теорем, в условиях которых предполагал только непрерывность, хотя в доказательствах неявно использовал дифференцируемость функций. Можно привести и другие примеры отсутствия строгости в его рассуждениях.

Труды Коши вызвали к жизни многочисленные работы по обоснованию математического анализа. Однако основной вклад в решение этой проблемы принадлежит К. Вейерштрассу, который в своих лекциях четко построил все здание математического анализа. Для такого построения прежде всего необходимо было дать *математически* строгое определение непрерывности функции, что и сделал Вейерштрасс. Сам факт существования такого определения разделил между собой два понятия: физической непрерывности и математической непрерывности.

Отделение математической непрерывности от физической означало, по сути дела, отделение математического анализа (европейской теоретической математики) от теоретической физики. Это строгое математическое определение непрерывности, а также ряд других понятий позволили очистить математический анализ от ряда внутренних противоречий, основанных на связи непрерывности и дифференцируемости функций.

В этой связи необходимо отметить, что Вейерштрасс построил пример непрерывной, но недифференцируемой ни в одной точке функции, что произвело огромное впечатление на всю математическую общественность. В конечном счете, во второй трети XIX века математический анализ был очищен от ошибочных теорем, а лежащие в его основании определения приобрели строгий, законченный вид.

Появление неевклидовых геометрий и обнаружение логических провалов в доказательстве основных утверждений математического анализа по-новому поставили вопрос о сущности математического доказательства. Со времен древних греков и до начала XIX века математики мало интересовались сущностью математического доказательства. Более того, они часто стремились скорее сформулировать математические результаты, чем строго обосновать их.

Возникшую ситуацию можно объяснить следующим образом. В древности математика, по существу, возникла в своей значительной части как геометрия. Зарождающаяся и возникшая греческая логика, начало которой было положено сочинением Аристотеля «Органон», достаточно подробно изучала различные виды силлогизмов и ввела в употребление два принципа: закон исключенного третьего и закон противоречия. Этой логики хватало, чтобы сформулировать правила доказательства геометрических утверждений, среди которых, уже в поздние времена, практически не было найдено принципиальных ошибок. Даже те ошибки, которые были обнаружены, удалось теми же методами исправить.

Важно отметить, что кроме логических правил вывода утверждений из предпосылок, в геометрии очень часто использовался специфический для этой науки прием, который был связан с *интеллектуальным передвижением (перенос и вращение)* без изменения геометрических фигур на плоскости или геометрических тел в пространстве. Применение такого приема было гениальной находкой греков. Его корни уходили, с одной стороны, в прагматическое познание, а с другой – в греческую метафизику. Этот прием, интуитивно очень понятен и проверяется на опыте, поэтому он часто составлял существенную часть математического доказательства различных геометрических теорем. Мы здесь не будем обсуждать логическую обоснованность этого приема, важно лишь подчеркнуть, что без него многие геометрические рассуждения не имели бы доказательства.

В других разделах математики – в арифметике и алгебре – подобных методов греки не предложили, и там им приходилось использовать только чисто логические рассуждения. По своему интеллектуальному уровню арифметика и алгебра обладали более высокой степенью абстракции, нежели геометрия. В силу этого трудно (а может быть, и невозможно) было найти прием, исходящий из прагматического познания, который мог бы играть в алгебраических и арифметических доказательствах такую же роль, как движение или вращение в геометрических доказательствах. Поэтому математики в течение более тысячи лет после падения греко-римской цивилизации для доказательства арифметических и алгебраических утверждений использовали геометрический язык. Однако с появлением буквенной записи математических формул использование геометрического языка для доказательства справедливости общих алгебраических формул стало не только затруднительным, но часто и невозможным.

Вейерштрасс первым понял, что обоснование математического анализа остается незавершенным, если не добиться более глубокого понимания системы вещественных чисел, и первым дал строгое определение и вывод свойств иррациональных чисел на основе известных свойств рациональных чисел. В той же области получили аналогичные результаты и другие математики, такие, как Р. Дедекинд и Г. Кантор, приняв за основу свойства рациональных чисел.

Однако логическое обоснование рациональных чисел отсутствовало. Эту проблему решил Дж. Пеано, который построил систему аксиом рациональных чисел, опирающуюся на систему аксиом натуральных чисел, указанную несколько ранее Дедекиндом. Работа Пеано, опубликованная в 1889 г., по существу завершила логическое обоснование теории комплексных чисел.

Таким образом, только в конце XIX века удалось осуществить мечту древних греков – дать аксиоматическое построение натуральных чисел. Принципиальной особенностью системы аксиом, лежащей в основе, в частности, натуральных чисел, было то, что в качестве одной из аксиом был взят принцип математической индукции, без которого нельзя было построить всю теорию чисел. Этот принцип сыграл для аксиоматического построения такую же роль, как принцип движения в геометрии. Как говорил А. Пуанкаре:

«Существенная черта умозаключения путем рекурренции (метода математической индукции) заключается в том, что оно содержит в себе бесчисленное множество силлогизмов, сосредоточенных, так сказать, в одной формуле» (А. Пуанкаре, 1, с. 16).

«Заметим, что эта индукция возможна только тогда, когда одна и та же операция может повторяться бесконечное число раз» (А. Пуанкаре, 1, с. 21).

Каждое такое повторение можно рассматривать как интеллектуальный опыт. Математическая индукция дает возможность перейти от отдельных интеллектуальных опытов к интеллектуальному утверждению, которое обосновывается бесконечным множеством опытов. Важно отметить, что при методе математической индукции это множество опытов обладает потенциальной бесконечностью (по Аристотелю).

При использовании математической индукции происходит резкое повышение уровня абстрагирования: от суждений низкой степени абстракции к суждениям более высокой степени абстракции.

«Мы можем подняться выше только благодаря математической индукции, которая одна может научить нас чему-либо новому» (А. Пуанкаре, 1, с. 21).

Другими словами, индукция позволяет получить нечто более новое, чем то, что содержится в каждом отдельно проведенном интеллектуальном опыте. Если воспользоваться современным языком, что мы неоднократно будем делать ниже, сказанное можно сформулировать следующим образом: индукция позволяет получить утверждение более *сложное*, чем каждое из частных утверждений, которые она использует. Это утверждение в известной степени противоречит одному из основных принципов теории познания, как в философии Аристотеля, так и в философии Декарта и Канта, который заключается в том, что все знания о целом мы можем получить из изучения составляющих его частей. Отсюда следует, что древние греки и не могли построить аксиоматическую теорию чисел, ибо для этого было необходимо средство, которое полностью выходило за рамки их философии и их принципов познания, и для нахождения которого неизбежно было бы революционное изменение в их мышлении.

Метод математической индукции в интеллектуальном плане напоминает также те универсальные принципы, которые вводили физики для построения аксиоматических физических теорий.

Хотя слово «индукция» больше связано с прагматическим познанием, все же сам метод математической индукции явился плодом интеллектуального познания. В терминах Канта этот принцип являлся априорно синтетическим утверждением. Из прагматического познания это утверждение невозможно получить, благодаря его высокой степени абстракции.

Однако принцип математической индукции имеет корни в прагматическом познании, в эмпиризме. Как мы уже говорили выше, на значение индукции для проведения рассуждений с целью получения достоверных утверждений указывал Ф. Бэкон в своем «Новом Органоне». Сам принцип математической индукции принадлежит логике интеллектуального познания и, как аксиома, принципиально отличается от остальных аксиом теории чисел. В частности, если другие аксиомы содержат первичные математические объекты, то аксиома математической индукции содержит не только первичные математические объекты, но и элементы интеллектуального рассуждения.

Как мы уже говорили, аксиоматическое обоснование теории чисел было завершено только в конце XIX века, а в первой половине этого века логические основания алгебры характеризовались попросту их полным отсутствием. Основная проблема состояла в том, что вместо всех типов чисел в алгебре использовались буквы. Все действия над этими буквами производились так, как если бы они обладали хорошо известными и интуитивно приемлемыми свойствами положительных целых чисел. Полученные с использованием этих свойств результаты оставались верными и при подстановке вместо букв чисел любой природы. Но поскольку природа этих чисел в то время оставалась непонятой, а их свойства не были логически обоснованы, то такое использование буквенных символов вызывало справедливые нарекания. Создавалось впечатление, что алгебра буквенных выражений обладала собственной логикой, которая была причиной ее непостижимой эффективности. Так в начале XIX века математики столкнулись с проблемой обоснования операций, производимых над буквенными, или символическими выражениями. Другими словами, надо было решить задачу – как проводить математические доказательства математических утверждений, связанных с символическими выражениями.

Начало логике как науке, по существу, было положено сочинением Аристотеля «Органон», в котором он обобщил весь опыт логических рассуждений, накопленный двумя столетиями развития греческой философии. Он выделил законы мышления, используемые философами, абстрагировал их от частностей и обнаружил, что эти законы обладают универсальной применимостью. Логика Аристотеля в основном представляла собой силлогистику – набор правил о выводе новых истинных утверждений из уже известных истинных утверждений.

На протяжении более двух тысячелетий логика Аристотеля не вызывала никаких возражений у ученых. Из западных ученых Декарт и Лейбниц были одними из первых, которые попытались расширить логику до универсальной науки о мышлении, применимой ко всем областям человеческого разума, т.е. построить своего рода универсальное исчисление мышления. Эту задачу они намеревались решить с помощью введения буквенной символики, подобной алгебраической, для того, чтобы уточнить и облегчить применение законов мышления. По их мысли, для построения универсальной логики необходимы три основных элемента. Первый элемент – универсальный научный язык, частично или полностью символический и применимый ко всем истинам, выводимым посредством рассуждений. Второй элемент – исчерпывающий набор логических форм мышления, позволяющий осуществить любой дедуктивный вывод из начальных принципов. Третий элемент – набор основных понятий, через которые определяются все остальные понятия, позволяющий поставить символ в соответствие с каждой простой идеей. Комбинируя символы и производя над ними различные операции, мы могли получить возможность выражать и преобразовывать более сложные понятия.

Наиболее существенный шаг в данном направлении проделал Лейбниц, однако эти его труды оставались неизвестными до 1901 года и поэтому не оказали никакого влияния на работы по созданию символической или математической логики, произведенные в XIX веке. Ни Декарт, ни Лейбниц не смогли выполнить эту программу. Только усилиями многих математиков в XIX веке удалось построить логику как математическую дисциплину, создав специфический символьный язык и введя в рассмотрение набор логических принципов и операций.

Первыми выдающимися результатами в этой области были работы Дж. Буля, которому принадлежит и первая развернутая система формальной логики. Он был самоучкой и поэтому никак не был связан путами традиционных взглядов и установок. Буль смог взглянуть на математику свежим взглядом и оценить ее логический статус с той ясностью и полнотой, которая позволила Б. Расселу позже сказать: «Чистую математику создал Буль в сочинении, которое называлось “Законы мысли”». В своей книге Буль так сформулировал программу построения алгебры логики:

«В предлагаемом вниманию читателей трактате мы намереваемся исследовать фундаментальные законы тех операций разума, посредством которых осуществляется мышление, дабы выразить их на символическом языке исчисления и на этой основе построить науку логики и ее метод».

Основная идея Буля состояла в том, что существующие законы мышления представимы в символическом виде, что позволяет в этом случае придать более точный смысл обычным логическим рассуждениям и упростить их применение.

Буквенная символика обладает многими преимуществами. Во-первых, она позволяет вкладывать в каждое переменное, обозначенное буквой, четкий и однозначно понимаемый смысл. Во-вторых, все доказательства сводятся к преобразованию одних наборов символов в другие по заранее заданным правилам, заменяющим словесные формулировки законов логики. В-третьих, правила преобразования выражают точные законы логики в сжатом, четком и легко применимом виде.

Буль, кроме основ символической логики, заложил основы исчисления высказываний, положив начало новой математической дисциплине, которая получила имя «математическая логика». Эта научная дисциплина начала бурно развиваться. Де Морган заложил основы логики отношений, которая была далеко продвинута Ч. Пирсом, Э. Шредером и другими математиками. Пирс ввел в рассмотрение два новых принципиальных логических понятия: понятие препозиционной функции (функции-высказывании) и понятие кванторов. Включение в логику отношений этих понятий позволило существенно расширить ее границы, ибо они уже являлись, по существу, утверждениями, которые характеризуют функции. Освоив те виды рассуждений, которые широко используются в математике, логика стала более полной.

Последний принципиальный шаг в математизации логики в XIX веке был сделан Г. Фреге, который первый заложил основы аксиоматического построения математической логики. Кроме того, он ввел в рассмотрение одно из важнейших логических понятий: материальную импликацию, а также ввел различие между простым утверждением высказывания и утверждением, что данное высказывание истинно. Понятие материальной импликации позже стало стандартным понятием математической логики, используемой как основа всей современной математики.

Созданная математическая логика позволила поставить математическое доказательство на твердую формальную основу. В этом направлении большую роль сыграл Пеано. Символику математической логики Пеано применил для записи не только логических законов, но и математических аксиом, а также для вывода теорем с помощью преобразования, по правилам математической логики, комбинаций символов, выражающих аксиомы. Введенный символический математический язык, позволяющий чисто формально записывать не только формулировку математического утверждения, но и ее доказательство, в определенном смысле сыграл революционную роль в формализации и абстрагировании различных утверждений, касающихся не только математики. Фрагменты этого языка нашли широкое применение в прагматической математике.

Математическая логика, рассматриваемая как математическая дисциплина, принципиально отличается от европейской теоретической математики и прагматической математики. Она, по своей сути, является третьим типом европейской математики.

Если объект теоретической математики (исключая ее геометрический аспект) — функции и математические числа, а объектами прагматической математики — числа и формулы, то объектами математической логики являются утверждения. Общим между всеми рассматриваемыми объектами является лишь то, что все они обозначаются определенными символами.

Рассматриваемые же виды математики отличаются способами проведения рассуждений. Теоретическая математика доказывает утверждения (теоремы) на основе правил, устанавливаемых математической логикой, прагматическая математика производит вычисления, а математическая логика разрабатывает приемы проведения рассуждений, удовлетворяющих определенным требованиям. Другими словами, математическая логика также доказывает (но уже другим путем), что предлагаемое удовлетворяет определенным требованиям.

Из сказанного следует, что в определенном смысле математическая логика «управляет» теоретической математикой. Иначе говоря, теоретическая математика и математическая логика находятся на разных уровнях. Поэтому принято говорить, что математическая логика относится к *метаматематике*.

Благодаря трудам упомянутых выше и других математиков, строгость снова стала играть заметную роль в математике и служить гарантией прочности и обоснованности ее достижений, накопленных в течение многих столетий. Это позволило крупнейшему математику того времени А. Пуанкаре заявить на Втором международном конгрессе математиков на пороге XX века:

«Можно сказать, что ныне достигнута абсолютная строгость».

Математическая логика является, с одной стороны, частью математики, а с другой – частью логики интеллектуального познания, т.е. частью метаматематики. Это означает, что степень абстракции математической логики является более высокой, нежели степень абстракции математики. Здесь мы опять сталкиваемся с иерархией математических построений. Благодаря математической логике метаматематика становится отраслью математики. Другими словами, метаматематику можно рассматривать как интеллектуальное познание со своей логикой, которая содержит в себе математическую логику и которую можно рассматривать как метаматематику. Этот процесс построения все более абстрактных познаний можно продолжить без ограничения.

Как мы уже говорили выше, во второй трети XIX века математический анализ, *в целом*, получил логическое обоснование. Однако за пределами этого обоснования остался ряд математических теорем, доказательство которых основывалось на положениях, не укладывающихся в схему обоснования математического анализа. Все эти утверждения (например, широко применяемое утверждение, известное как лемма Гейне – Бореля) для своего доказательства использовали свойства бесконечного множества, которые никаким образом не вытекали из логического обоснования, построенного на понятии потенциальной бесконечности.

Принципиальным шагом на пути поиска обоснования упомянутых проблем было создание Г. Кантором теории множеств. На пути построения этой теории Кантор порвал с многовековой традицией и стал рассматривать бесконечные множества как единые сущности, доступные человеческому разуму. Начиная с Аристотеля, математики проводили четкую грань между *потенциальной бесконечностью* и *актуальной бесконечностью*. Поясним еще раз эти понятия на примере. Возьмем ряд положительных целых чисел. Его можно рассматривать как множество, состоящее из *всех* целых чисел. В таком случае является математическим объектом. При таком взгляде множество всех натуральных чисел представляет собой *актуальную бесконечность*. С другой стороны, на совокупность натуральных чисел мы можем посмотреть как на множество, в котором каждое натуральное число можно получить в результате прибавления единицы к некоторому другому натуральному числу. В таком случае эта совокупность выступает как *потенциальная бесконечность*.

Как уже сказано выше, математики проводили различие между *актуальной* бесконечностью объектов и *потенциальной* бесконечностью. Вопрос, следует ли считать бесконечные множества актуально или потенциально бесконечными, имеет длинную историю. Аристотель в своей «Физике» утверждал: «Остается альтернатива, согласно которой бесконечное имеет потенциальное существование… Актуально бесконечное не существует». Большинство математиков (Галилей, Лейбниц, Коши, Гаусс и другие) отчетливо понимали различие между потенциально бесконечными множествами и актуально бесконечными множествами и актуально бесконечные множества исключали из рассмотрения. Таким образом, введя в рассмотрение актуально бесконечные множества, Кантор выступил против традиционных представлений о бесконечности, разделяемых великими математиками прошлого.

Начиная с древних греков, практически все математики до Кантора в явной форме отказывались рассматривать и изучать актуальные бесконечности, хотя неявно иногда использовали их. Для изучения множеств как актуальных бесконечностей Кантор ввел в рассмотрение ряд принципиальных понятий, таких, как мощность множества, взаимооднозначное соответствие между элементами множества, кардинальные и порядковые трансфинитные числа.

Когда Кантор в 70-х годах XIX века приступил к созданию теории бесконечных множеств, эта теория находилась на периферии математической науки. Доказанные им теоремы о тригонометрических рядах, для получения которых была построена теория множеств, не были столь фундаментальными, чтобы обратить на себя внимание широкой математической общественности. Но к началу XX века теория множеств, созданная Кантором, нашла широкое применение в различных областях математики, а затем стала одним из основных разделов математики, необходимым для ее развития. В 1926 году один из крупнейших математиков современности Д. Гильберт так отозвался о теории множеств:

> «Мне представляется, что это самый восхитительный цветок математической мысли и одно из величайших достижений человеческой деятельности в сфере чистого мышления».

Созданная Кантором теория множеств вызвала бурные споры среди математиков, ибо, как метко выразился Ф. Хаусдорф в своей книге «Основания теории множеств», что теорию множеств можно назвать «областью, где ничто не является очевидным, где истинные утверждения нередко звучат парадоксально, а правдоподобные зачастую оказываются ложными». Кроме того, одной из причин этих споров было и то, что теория множеств внесла разнобой и в философские позиции математиков. Ряд математиков, во главе с одним из крупнейших – А. Пуанкаре, считали, что математика является опытной наукой, и основные ее идеи приходят из опыта. Можно сказать, что они стояли на позициях Аристотеля, в то время как Кантор стоял на позициях Платона и верил, что в окружающем нас мире идеи существуют независимо от человека.

Дискуссия по поводу основных математических понятий теории множеств, по своей сути, привела к столкновению двух «партий» математиков, каждая из которых стояла на определенных «идеологических» позициях. Одну мы условно назовем греческой партией, потому что идеологически она базировалась на позициях греческой математики. Другая партия, которую мы условно назовем европейской партией, стояла на позициях идеологии европейской математики. Самое удивительное, что математики, принадлежащие к греческой партии согласно их отношению к теории множеств, были яркими представителями европейской математики, в рамках которой они стали знаменитыми с помощью полученных ими математических результатов.

О принципиальных философских отличиях двух математик – европейской и греческой – мы уже писали в предыдущих пунктах. Одним из критериев принадлежности к европейской математике являлось широкое использование понятия непрерывности в математических исследованиях. Попытки логического обоснования различных проблем математического анализа и привело к созданию теории множеств. Только введение трансфинитных аналогов математической индукции или некоторых свойств конечных множеств позволило избавить математический анализ от «логических» дыр.

Одним из основных идеологических вопросов, которые привели к противостоянию этих двух партий, был вопрос: в каком смысле можно утверждать, что математические понятия *существуют*? Аристотель считал, что все математические понятия должны иметь реальные прототипы. Именно из-за отсутствия физических реализаций Аристотель отвергал и существование бесконечного множества как «готовой» совокупности элементов, и существование правильного семиугольника. Отрицание существования правильного семиугольника греки основывали на том, что им не удалось его построить с помощью циркуля и линейки, а это означало, что данная правильная фигура была «не построенной», т.е. в определенном смысле «не существующей». Математический объект существует, согласно греческой математической традиции, только в том случае, если его можно «конструктивно» построить. Так как данное «построение» шло в рамках геометрии, то это означало, по существу, что мы должны *доказать* существование объекта на основе аксиом и разрешенных теорией действий. Этим можно объяснить то, что греческая математика оперировала относительно небольшим количеством математических объектов.

Европейская математика, в отличие от греческой, допускала и широко использовала «неконструктивные» математические объекты. Мы уже об этом говорили выше, когда обсуждали различные типы математических чисел. В XVIII – XIX веках стали появляться математические утверждения, которые получили специфическое название: «теоремы существования». Эти теоремы доказывали принципиальное существование математического объекта, однако при этом не указывался метод (способ) его построения (конструирования). Например, Гаусс доказал, что любое алгебраическое уравнение n-степени с вещественными или комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один корень. Но из приведенного Гауссом доказательства не было ясно, каким образом можно *вычислить* этот корень. Аналогично Кантор доказал, что вещественных чисел больше, чем алгебраических чисел. Следовательно, должны существовать трансцендентные иррациональные числа, не являющиеся алгебраическими числами. Но такое доказательство существования не позволяло назвать и вычислить хотя бы одно трансцендентное число.

В конце XIX века в теории множеств были обнаружены противоречия, которые поставили под вопрос логическую непротиворечивость не только теории множеств, но и всей математики. Обнаруженные противоречия математики предпочитали называть парадоксами. В качестве примеров приведем два парадокса, которые вытекают из теории множеств, но мы дадим их в нематематической формулировке. Рассмотрим утверждение: «Из всех правил имеются исключения». Само это высказывание является правилом. Следовательно, для него можно найти по крайней мере одно исключение. Но это означает, что рассматриваемое утверждение является правилом без исключения. Такого рода высказывания содержат ссылку на себя и отрицают самих себя.

Другим примером парадокса служит так называемый «парадокс брадобрея». Деревенский брадобрей заявил, что он бреет всех жителей, которые не бреются сами, и не бреет тех, кто сам бреется. Но тогда возникает проблема с самим брадобреем. С одной стороны, он не должен брить себя, так как он сам бреется. А с другой стороны, если он сам не бреется, то он должен брить себя. Таким образом, бра- добрей оказался в безвыходном положении – он не мог ни брить себя, ни не брить.

Мы привели выше один вид логических проблем, в который входят так называемые проблемы непротиворечивости и которые обычно рассматривали как парадоксы теории множеств. Но именно теория множеств открыла математикам глаза, что противоречия можно найти и в классическом математическом анализе. В частности, при доказательстве ряда важных результатов математического анализа явно или неявно используется некое утверждение, которое было названо *аксиомой выбора*. Суть этой аксиомы можно сформулировать следующим образом: «Из каждого множества можно выбрать элемент». Подобная формулировка аксиомы выбора в начале XX века вызвала волну критики со стороны части ведущих математиков. Суть критики состояла в том, что если не указано правило, по которому из множества выбирается элемент, то реально выбор не производится. С другой стороны, в 1923 году Д. Гильберт назвал аксиому выбора общим принципом, который необходим и неоценим как один из первых элементов математического вывода (доказательства).

В связи с использованием аксиомы выбора в различных вариантах формулировок мы опять встречаемся с принципиальным вопросом, который упоминали выше, а именно с вопросом: как следует понимать *существование* математического объекта. Все более широкое применение бесконечных множеств при перестройке оснований математики и создании ее новых разделов вновь оживило старые разногласия по поводу законности использования актуально бесконечных величин и множеств. Эти разногласия привели к общему согласию в том, что важным представлялось доказать непротиворечивость всей математики, ибо без этого нельзя гарантировать, что в будущем не возникнут новые противоречия.

Математики конца XIX века и XX века потратили огромные усилия для того, чтобы укрепить логический фундамент математики. Однако эти усилия привели к разделению всего коллектива математиков на «племена», каждое из которых исповедовало и исповедует свою «религию» логического обоснования математики. И как всегда, когда имеем дело с «религиозными распрями», это приводит к открытому противоборству.

Одно из направлений логического обоснования непротиворечивости математики получило название «логической школы», или «логицизма». Основной тезис логицистов сводился к утверждению, то математика может быть полностью выведена из логики. В начале XX века основная часть математиков была уверена, что законы логики представляют собой незыблемые, вечные истины. Но тогда истинна и математика. А поскольку истина непротиворечива, то математика должна быть непротиворечивой.

Осуществление этой программы, по существу, начал еще Г. Лейбниц. Однако наиболее значительный вклад в это направление внес Б. Рассел. В «Принципах математики» в 1903 году он писал:

«Тот факт, что вся математика есть не что иное, как символическая логика, – величайшее открытие нашего века».

Идеи, в общих чертах уже намеченные Расселом в «Принципах математики», позже изложенные им и А.Н. Уайтхедом в их совместном труде «Основания математики» (1910 – 1913), были развиты до окончательного формулирования позиции логической школы.

Логицизм вызвал негативное отношение со стороны ряда математиков, во главе которых стоял А. Пуанкаре, который в своей книге «Наука и метод» (1906) писал:

«Эта наука не имеет единственной целью вечное созерцание своего собственного пупа; она приближается к природе, и раньше или позже она придет с ней в соприкосновение; в этот момент необходимо будет отбросить чисто словесные определения, которыми нельзя будет довольствоваться» (А. Пуанкаре, 1, с. 393).

Далее он продолжает:

«Как бы там ни было, логистика должна быть переделана, и неизвестно, что в ней будет спасено. Бесполезно прибавлять, что на карту поставлены только канторизм и логистика. Истинные математические науки, т.е. те, которые чему-то служат, могут продолжать свое развитие только согласно свойственным им принципам, не заботясь о тех бурях, которые бушуют вне их; они будут шаг за шагом делать свои завоевания, которые являются окончательными и от которых им никогда не будет нужды отказываться» (А. Пуанкаре, 1, с. 397).

Основной довод, который может убедить в невыполнимости программы логистов, заключается в следующем: так как математическая логика – это часть математики, то признание непротиворечивости всей математики вытекает из предположения непротиворечивости части математики, которая почему-то априори признается непротиворечивой.

В то время, когда логицизм переживал период становления, группа математиков, называвших себя *интуиционистами*, предложила совершенно иной подход к обоснованию математики, диаметрально противоположный логицизму. В то время как логисты в поисках надежных оснований математики все более полагались на изощренную логику, их основные соперники отворачивались от логики, и даже в каком-то отношении отказались от нее. Однако цель, которую преследовали логисты и интуиционисты, была единой.

Подобно тому, как логицизм имел своим предшественником Лейбница, так и интуиционизм имел своими предшественниками Декарта и Паскаля. Так, в «Правилах для руководства ума» Декарт писал:

«Для того, чтобы в дальнейшем не подвергать себя подобному заблуждению, мы рассмотрим здесь все те действия нашего интеллекта, посредством которых мы можем прийти к познанию вещей, не боясь никаких ошибок. Возможны только два таких действия, а именно: интуиция и дедукция.

Под интуицией я разумею не веру в шаткое свидетельство чувств и не обманчивое суждение беспорядочного воображения, но понятие ясного и внимательного ума, настолько простое и отчетливое, что оно не оставляет никакого сомнения в том, что мы мыслим, или, что одно и то же, прочное понятие ясного и внимательного ума, порождаемое лишь естественным светом разума и благодаря своей простоте более достоверное, чем сама дедукция, хотя последняя и не может быть плохо построена человеком, как я уже говорил выше.

Так, например, всякий может интуитивно постичь умом, что он существует, что он мыслит, что треугольник ограничивается только тремя линиями, что шар имеет только одну поверхность, и подобные этим истины, гораздо более многочисленные, чем это замечает большинство людей вследствие того, что не считает достойным внимания такие простые вещи.

Может возникнуть сомнение, для чего мы добавляем к интуиции еще и этот другой способ познания, заключающийся в дедукции, посредством которой мы познаем все, что необходимо выводится из чего-либо достоверно известного. Это нужно сделать потому, что есть много вещей, которые хотя и не являются самоочевидными, но доступны достоверному познанию, если только они выводятся из верных и понятных принципов путем последовательного и нигде не прерывающегося движения мысли при зоркой интуиции, каждого отдельного положения. Подобно этому мы узнаем, что последнее кольцо длинной цепи соединено с первым, хотя мы и не можем охватить одним взглядом все находящиеся между ними кольца, которые обусловливают это соединение, лишь бы последовательно проследили их и вспомнили, что каждое из них, от первого до последнего, соединено с соседним.

Итак, мы различаем здесь интуицию ума от правильной дедукции в том отношении, что под дедукцией подразумевается именно движение или последовательность, чего нет в интуиции; кроме того, дедукция не нуждается в наличной очевидности, как интуиция, но скорее заимствует свою достоверность у памяти. Отсюда следует, что положения, непосредственно вытекающие из первого принципа, можно сказать, познаются как интуитивным, так и дедуктивным путем, в зависимости от способа их рассмотрения, сами же принципы – только интуитивным путем, как и наоборот, отдаленные их следствия – только дедуктивным путем» (Р. Декарт, 1).

Многие положения интуиционизма были предвосхищены И. Кантом.

«Он считал, что свои ощущения мы получаем из предполагаемого внешнего мира, однако эти ощущения (или восприятия) не дают существенного знания. Все восприятия включают в качестве необходимого звена воздействие между тем, кто воспринимает, и воспринимаемым объектом. Разум организует восприятия, и эти организации являются интуитивными представлениями о пространстве и времени. Пространство и время не существуют сами по себе, а являются творениями нашего разума. Разум применяет свое понимание пространства и времени к данным опыта, которые лишь пробуждают разум. Знание может начинаться с опыта, но в действительности не опыт является источником знания. Знание берется из разума. Математика дает нам блестящий пример того, как далеко мы можем продвинуться в априорном (истинном) знании независимо от опыта» (М. Клайн, 1, с. 268).

Более-менее окончательная версия современного интуиционизма была разработана в 1907 году Э.Я. Брауэром. По его мнению, математика – это человеческая деятельность, которая начинается и протекает в разуме человека. Вне человеческого разума математика не существует. Следовательно, математика не зависит от реального мира. Разум непосредственно постигает основные, ясные и понятные, интуитивные представления. Они являются не чувственными или эмпирическими, а непосредственно данными, достоверными представлениями о некоторых математических понятиях.

«Математическое мышление, по Бауэру, представляет собой процесс мысленного построения, создающего свой собственный мир, не зависящий от опыта и ограниченный лишь тем, что в основе его должна лежать фундаментальная математическая интуиция. Это фундаментальное интуитивное понятие следует представлять себе не как нечто сходное по природе с неопределяемыми понятиями, встречающимися в аксиоматических теориях. Наоборот, через него должны постигаться разумом все неопределяемые идеи, используемые в различных математических теориях, если они действительно призваны служить математическому мышлению. Кроме того, математика по своей природе синтетична. Она занимается составлением истин, а не выводит их из логики» (М. Клайн, 1, с. 272).

Согласно Бауэру, математика – полностью автономный, находящий основание в самом себе вид человеческой деятельности, которая не зависит от языка. Язык используется только для передачи истин. Математические мысли не зависят от их словесного выражения. Более того, мысли нельзя выразить полностью без потери содержания даже на математическом языке. Логика дает систему правил, позволяющих осуществлять дедуктивный вывод новых словесных формулировок, которые предназначены для передачи истин. Но эти истины нельзя постигнуть ни непосредственно, ни вообще.

Поэтому логика не может открыть никакой истины, которая не получается другим путем. Логические принципы – это закономерности, наблюдаемые апостериорно в языке, которые являются удобным инструментом для манипулирования языком, и не более того. Основные достижения в математике получены с помощью изменений основной теории, а не с помощью усовершенствования логики. Логика строится на математике, а не математика на логике.

«Не признавая никаких априори обязательных логических принципов, Бауэр тем самым отвергал математическую задачу вывода заключений из аксиом. Следовательно, наряду с логицизмом Бауэр отвергал и аксиоматизацию математики, предпринятую в конце XIX века. Математика отнюдь не обязана почтительно относиться к правилам логики. Знание математики не требует знания формальных доказательств, и поэтому парадоксы несущественны, даже если мы приняли те математические понятия и построения, которые приводят к парадоксам. Парадоксы являются дефектом логики, а не собственно математики. Следовательно, непротиворечивость – это своего рода приведение. Она лишена плоти. Непротиворечивость возникает как следствие правильных размышлений, а о правильности размышлений мы судим интуитивно.

Но в логике существуют некоторые ясные, интуитивно приемлемые логические принципы или методы, которые можно использовать для вывода новых теорем из старых. Эти принципы входят составными частями в фундаментальную математическую индукцию» (М. Клайн, 1, с. 274).

Из этой цитаты следует, что для интуиционистов некоторые логические принципы, которые широко использовались при доказательствах теорем математического анализа, являются неприемлемыми. Поэтому теоремы, при доказательстве которых были использованы неприемлемые логические принципы и методы, с этих позиций не являются доказанными. В качестве примеров таких «недоказанных» теорем можно привести теорему Больцано – Вейерштрасса, утверждающую, что каждое ограниченное бесконечное множество имеет предельную точку, и теорему существования максимума (минимума) непрерывной функции на замкнутом отрезке. Заметим, что и следствия из этих теорем также являются «недоказанными».

Интуиционисты взяли на вооружение и греческий подход к понятию существования математического объекта. Это означало, что, по их мнению, математический объект существует, если его можно «сконструировать», т.е. можно указать метод, позволяющий построить объект за конечное число шагов (или вычислить с любой заданной степенью точности).

Исходя из всех ограничений, накладываемых интуиционистами на математическую логику, вытекает, что с их точки зрения неприемлемы классическое и аксиоматическое построение теории вещественных чисел, математический анализ, современная теория функций вещественной переменной, интеграл Лебега и т.п. Все их попытки построить эти теории на интуиционистских принципах нельзя признать удачными.

В качестве заключения этого беглого обзора взглядов интуиционистов приведем высказывание Н. Бурбаки:

«Интуиционистская школа, о которой математики вспоминают как о своего рода историческом курьезе, во всяком случае, оказала услугу математике тем, что заставила своих противников, т.е. большинство математиков, яснее осознать причины (одни – логического порядка, другие – психологического) их веры в математику» (Н. Бурбаки, 1, с. 53).

Противоборство логистов и интуиционистов было только началом схватки за обоснование математики. Затем в борьбу вступили новые участники: *формализм*, который был создан под руководством одного из крупнейших математиков новейшего времени Давида Гильберта, и математики теоретико-множественного направления, родоначальником которого стал Э. Цермело.

В основе формализма лежал аксиоматический подход. Успехи в аксиоматизации математического анализа привели к тому, что в начале XX века аксиоматический подход представлялся идеалом математической строгости. Д. Гильберт, как лидер мировой математики того времени, в своей статье «Аксиоматическое мышление» (1918) писал:

«Все, что может быть предметом математического мышления, коль скоро назрела необходимость в создании теории, оказывается в сфере действия аксиоматического метода и тем самым математики. Проникая во все более глубокие слои аксиом, … мы получаем возможность все дальше заглянуть в сокровенные тайны научного мышления и постичь единство нашего знания. Именно благодаря аксиоматическому методу математика, по-видимому, призвана сыграть ведущую роль во всем нашем знании».

Аналогичные мысли Д. Гильберт высказывал и в 1922 году:

«Аксиоматический метод поистине был и остается подходящим и неоценимым инструментом, в наибольшей мере отвечающим духу каждого точного исследования, в какой бы области оно ни проводилось. Аксиоматический метод логически безупречен и в то же время плодотворен; тем самым он гарантирует полную свободу исследования. В этом смысле применять аксиоматический метод – это значит действовать, понимая, о чем идет речь. Если ранее, до аксиоматического метода, приходилось действовать наивно, слепо веря в существование определенных отношений, то аксиоматический метод устраняет подобную наивность, сохраняя все преимущества уверенности».

Цель формализма, как ее сформулировал в 20-х годах XX века Гильберт, заключалась в следующих словах: «Эта теория ставит своей целью установить определенную надежность математического метода». Математика с точки зрения формализма представляет собой набор формальных (аксиоматических) систем, каждая из которых обладает своей логикой, наборами понятий, аксиом, правил дедуктивного вывода и своим содержанием, состоящим из доказанных теорем. Отметим несколько основных содержательных положений этой теории.

Во-первых, правильный подход к математике должен включать понятия и аксиомы как логики, так и математики. Гильберт считал, что математика не выводима из логики, т.е. математика — не следствие логики, а — автономная научная дисциплина. Поэтому и аксиоматика математики, и аксиоматика логики должны включать как математические, так и логические аксиомы.

Во-вторых, чтобы избежать неоднозначности языка и бессознательного использования интуитивных представлений, которые могут привести к парадоксам, а также исключить другие парадоксы и достичь строгости и объективности, все утверждения логики и математики должны быть записаны в символической форме. В этом случае элементами математического мышления являются символы и высказывания, т.е. комбинации (строки) символов. Любое математическое утверждение записывается в виде формулы.

В-третьих, математика рассматривается как формальная дисциплина, занимающаяся преобразованием символов безотносительно к их значению. Доказательство теорем сводится к преобразованию символов, производимому по определенным правилам логического вывода.

В-четвертых, представленная формула признается истинной в том и только в том случае, если ее можно получить как последнее звено последовательности формул, каждый член которой либо представляет собой аксиому формальной системы, либо выведен с помощью одного из правил логики.

В течение десяти лет (1920 – 1930) Гильберт вместе со своими учениками и последователями создал метод, получивший название «метаматематика», который служил для доказательства непротиворечивости любой формальной системы. Создавая этот метод, Гильберт был оптимистичен до такой степени, что на Международном математическом конгрессе в 1928 году заявил:

«Не сомневаюсь, что наш новый подход к основаниям математики, который можно назвать теорией доказательства, позволит навсегда покончить со всеми проблемами обоснования математики».

А в статье, опубликованной в 1930 году, он писал:

«С помощью этого нового обоснования математики, которое справедливо можно именовать теорией доказательства, я преследую важную цель: именно, я хотел бы окончательно разделаться с вопросами обоснования математики как таковыми, превратив каждое математическое высказывание в поддающуюся конкретному показу и строго выводимую формулу и тем самым приведя образование понятий и выводы, которыми пользуется математика, к такому изложению, при котором они были бы неопровержимы и все же давали картину всей науки. Я надеюсь, что смогу с помощью своей теории доказательств полностью достигнуть этой цели, хотя для завершения необходима еще большая работа» (Д. Гильберт, 1, с. 365).

Перейдем к рассмотрению последнего крупного направления в обосновании математики, также возникшего в начале XX века и получившего название «*теоретико-множественного*». Истоки этого направления можно проследить в работах Дедекинда и Кантора. Последний еще в 1885 году утверждал, что чистая математика сводится к теории множеств. Впервые программа Кантора была осуществлена Расселом и Уайтхедом. А если воспользоваться методом координат, то из арифметики следует вся математика, включая геометрию. Это означает, что теорию множеств можно рассматривать как основание всей математики. Поэтому в случае построения непротиворечивой системы аксиом теории множеств, доказательство непротиворечивости всей математики будет полностью получено. Другими словами, непротиворечивость математики следует из непротиворечивости аксиоматической теории множеств.

Первый основополагающий вклад в построение аксиоматической теории множеств внес Э. Цермело в 1908 году. В 1922 году эту систему аксиом усовершенствовал А. Френкель. Система аксиом, которая наиболее часто используется специалистами по теории множеств, называется системой Цермело – Френкеля. Позже появились и другие системы аксиом теории множеств, однако не существует критерия, по которому необходимо отдать предпочтение одному варианту системы аксиом по отношению к другому.

В 1936 году группа французских математиков, объединившись под псевдонимом Никола Бурбаки, поставила своей целью построить всю математику на основе аксиоматики Цермело – Френкеля (в переработке Бернайса – Геделя). При построении они использовали некоторые логические принципы, ибо, по мнению бурбакистов, логика подчиняется аксиомам математики, причем она не определяет ни того, что такое математика, ни того, чем занимаются математики.

К тридцатым годам XX века сложились четыре различных, так или иначе конфликтующих подхода к обоснованию логических основ математики (логицизм, интуиционизм, формализм и теоретико-множественное направление), и сторонники этих направлений вели между собой ожесточенную борьбу. Никто не мог более утверждать, что некая теорема доказана правильно: непременно следовало пояснить, каким стандартам правильности удовлетворяет данное доказательство. Та самая наука, которая в начале XIX века считалась образцом для всех других видов интеллектуальной деятельности, собранием вечных истин, касающихся также и внешнего мира, вдруг в первой трети XX века оказалась в состоянии внутренних распрей, которые показали, что математические истины носят неопределенный относительный характер.

Если одна из принципиальных методологических проблем математики – проблема ее обоснования – возникла перед учеными только в начале XIX века из-за того, что были обнаружены противоречия в математическом анализе, то появление проблемы о полноте математики в 20-х годах не было вызвано никакими внутренними или внешними причинами. В течение многих веков европейские математики верили, что любое математическое утверждение, правильно сформулированное, можно либо доказать, либо опровергнуть с помощью дедуктивных рассуждений. Это утверждение и составляет суть понятия полноты математики как научной дисциплины. Выше мы уже приводили высказывание крупнейшего математика нашего времени Д. Гильберта о его глубоком убеждении в том, что полноту математики можно математически доказать. Эту веру вместе с ним разделяла и вся математическая общественность, ибо именно эта вера служила и служит математикам стимулом тратить многие годы своей жизни (часто это были лучшие, наиболее плодотворные годы) на решение математических проблем, степень трудности которых непросто заранее определить.

Эта задача — найти доказательство полноты математики — была по своему психологическому значению сравнима с попытками теологов доказывать существование Бога. Приведенное сравнение не является корректным по общественной и интеллектуальной значимости, но оно отражает степень психологического накала такой постановки задачи для математиков. Вполне возможно, что для определенных кругов математической общественности сама этой постановка проблемы в качестве математической задачи является «святотатством». Среди четырех направлений построения математики, о которых мы писали выше, лишь *одно* направление, а именно *формализм*, обладало математическими средствами для того, чтобы не только сформулировать данную задачу, но и наметить те или иные пути ее решения. Гильберту принадлежат следующие слова:

«В качестве примера возможного подхода к решению фундаментальных проблем я хотел бы избрать тезис о разрешимости любой математической задачи. Мы все убеждены в том, что любая математическая задача поддается решению. Это убеждение в разрешимости каждой математической проблемы является для нас большим подспорьем в работе, когда мы приступаем к решению математической проблемы, ибо мы слышим внутри себя постоянный призыв: вот проблема, ищи решение. Ты можешь найти его с помощью чистого мышления, ибо в математике не существует ignorabimus (мы не будем знать)».

Но в 1931 году К. Гёдель опубликовал работу, содержащую два поразительных результата. Первый удивительный результат был теоремой, которая известна как *теорема Гёделя о неполноте*. Эта теорема утверждает, что если любая формальная теория, включающая арифметику целых чисел, непротиворечива, то она неполна. В качестве примера формальных систем, в которых имеет место это утверждение, можно привести системы, построенные Расселом – Уайтхедом, Цермело – Френкелем и Гильбертом. В этих системах непротиворечивость влечет неполноту. Позже было показано, что истинность некоторых неразрешимых в этих теориях утверждений удалось доказать путем расширения логики принятых в этих системах проведения доказательств, т.е. с помощью дополнительных логических средств.

Другая теорема Гёделя, которая является следствием теоремы о неполноте, утверждает, что непротиворечивость любой достаточно мощной математической системы, содержащей арифметику целых чисел, не может быть установлена средствами самой системы на основе математических принципов, принятых различными школами в основании математики.

Эти результаты Гёделя потрясли математику. По силе воздействия их можно сравнить с открытием существования неевклидовых геометрий. Если открытие неевклидовых геометрий лишило математику ореола глашатая общечеловеческих абсолютных истин, то результаты Гёделя подорвали веру математиков в абсолютную истинность самих математических построений. С этого момента математики работали под угрозой, что внутри всех их сложнейших и изобретательных построений скрывается противоречие, которое может все обратить в прах. С другой стороны, теорема о неполноте в определенной степени является отрицанием закона исключенного третьего.

К большому сожалению, в рассматриваемый период землетрясения в математике не закончились на уже перечисленных выше. Не меньший шок у математиков вызвала теорема, известная как теорема Левенгейма – Сколема. Суть ее заключается в том, что любая система аксиом допускает по крайней мере две неизоморфные интерпретации. Это означает, что аксиомы не устанавливают пределов для интерпретаций, или моделей. Следовательно, математическую реальность невозможно однозначно включить в аксиоматические системы. Как видно из доказательства этой теоремы, одна из причин появления дополнительных интерпретаций состоит в том, что в любой аксиоматической теории в аксиомы входят первичные понятия, определение которых не вытекает явно или неявно из аксиом.

Если теоремы Гёделя встряхнули европейскую математику, то теорема Левенгейма – Сколема нанесла глубокий методологический ущерб всей математике, включая греческую, ибо это был удар по самой идее аксиоматического подхода построения математики. А ведь данный подход находился в основе еще научной методологии Аристотеля.

Как мы видим из сказанного выше, европейская теоретическая математика, начиная со второй трети XIX века, стала уделять все большее внимание исследованиям внутренних проблем своего развития. Это были проблемы, связанные с проведением математических доказательств, с аксиоматизацией математики, с алгебраизацией ее языка, с непротиворечивостью и полнотой математики и т.п. Внутренние проблемы развития математики стали отвлекать на их решение все большее количество математиков.

Этот процесс привел к тому, что европейская теоретическая математика распалась на два больших лагеря: европейскую чистую математику и европейскую прикладную математику. Европейская прикладная математика осталась верна европейской теоретической физике, которой она в то время успешно поставляла необходимый математический аппарат для построения физических теорий. Европейская чистая математика образовалась на основе двух групп математиков, одна из которых начала заниматься внутренними проблемами теоретической математики, а другая продолжала заниматься исследованиями в духе греческой математики, правда, часто используя в этих исследованиях и методы математического анализа. Если в начале XIX века число математиков, занимающихся чистой математикой, было меньше, нежели число математиков, занимающихся прикладной математикой, то к концу этого века ситуация изменилась, ибо число математиков, занимающихся чистой математикой, резко возросло. Такое изменение, в частности, можно объяснить несколькими причинами.

Во-первых, бурное развитие математики в XIX веке позволило сформулировать достаточно большое количество тем для математических исследований в области чистой математики. Увеличение тем для исследований можно объяснить появлением значительного числа новых математических понятий, а также процессом формализации математических рассуждений. *Во-вторых*, в чистой математике исследователь определяет тему исследования самостоятельно, исходя из своих личных пристрастий, которые и составляют базу его личного научного интереса. Результатом любого исследования в области чистой математики является набор утверждений (теорем), формулировку которых можно выбрать таким образом, чтобы исследователь мог бы их доказать, исходя из своих знаний, способностей или таланта, т.е. из своих возможностей. Критерием правильности выбора темы служит лишь общественное признание, основанное на том, что статья, излагающая полученные результаты, публикуется в соответствующем научном издании. *В-третьих*, обычно для решения задач чистой математики требуется относительно незначительное количество знаний в области только математики, а уже сам процесс решения зависит только от самого исследователя.

Между тем, для решения задач в прикладной математике необходимо обладать знаниями в некоторой области, часто достаточно далекой от математики, а процесс решения этих задач может потребовать сотрудничества других людей или дополнительных материальных ресурсов. Более того, в прикладной математике обычно нет никакой возможности изменить математическую формулировку задачи произвольным образом, ибо она тесно связана с формулировкой задачи на языке приложения. Такая ситуация существенно затрудняла выбор задачи для исследования в соответствии с интеллектуальными, физическими и материальными возможностями исследователя.

Необходимо также отметить, что к концу XIX – к началу XX века большинство математиков-теоретиков уже не признавало связи между математикой и прикладными науками. Более того, говорить о приложении математики в технике для математиков в то время становилось немодным и даже непонятным, ибо для этого необходимо было для них, по существу, спуститься с Олимпа на землю. В подтверждение этому можно привести высказывания известного математика М. Стоуна из его статьи «Революция в математике», относящейся уже ко второй половине XX века:

«Хотя в нашей концепции математики и в наших взглядах на нее по сравнению с началом XX века произошло несколько важных изменений, лишь одно из них вызвало подлинный переворот в наших представлениях о математике – открытие полной независимости математики от физического мира… Математика, как мы сейчас понимаем, не имеет ни одной обязательной связи с физическим миром, помимо той смутной и несколько загадочной, что неявно содержится в утверждении о том, что процесс мышления происходит в мозгу. Без преувеличения можно сказать, что открытие независимости математики от внешнего мира знаменует собой одно из самых значительных интеллектуальных достижений в истории математики. …

Сравнивая современную математику с той, какой она была в конце XIX века, нельзя не удивляться, как быстро выросла наша математика качественно и количественно. Вместе с тем нельзя не отметить, как быстро она развивалась, как все больше места в ней отводилось абстракции и все больше внимания уделялось внедрению и анализу емких математических структур. Как показывает более внимательное рассмотрение, именно новая ориентация математики, ставшая возможной лишь благодаря ее отходу от приложений, и была подлинным источником необычайной жизнеспособности и роста математики за последнее столетие. …

Современный математик предпочитает определить предмет своей науки как изучение общих абстрактных схем, каждая из которых представляет собой здание, построенное из вполне определенных абстрактных элементов, скрепленных произвольными, но однозначно определенными соотношениями. … По мнению математика, ни сами системы, ни предоставляемые логикой средства для изучения их структурных свойств не имеют прямой или необходимой связи с физическим миром. … Лишь в той степени, в какой математика освободилась от уз, связывающих ее в прошлом с теми или иными аспектами реальности, она может стать гибким и мощным инструментом, столь необходимым для вторжения в области, лежащие за пределами известного» (M. Stone, 1).

Высказываний, подобных приведенной выше цитате, можно привести достаточное количество.

В заключение этого пункта отметим, что в связи с потребностями теоретической физики, а затем и инженерии, в этот период были проведено значительное количество исследований, относящихся к теоретической вычислительной математике и связанных с теоретическим решением различного вида уравнений, аппроксимацией функций, суммированием бесконечных рядов и т.п.

Природа научных знаний такова, что малопонятные и совершенно бесполезные приобретения сегодняшнего дня становятся популярной пищей для будущих поколений.

Ч. Бэббидж

8.3. Развитие прагматической математики.

К началу XIX века в прагматической математике можно было четко выделить три направления исследования. Одно направление обслуживало прагматическую физику и небесную механику. Здесь основные усилия были направлены на обработку результатов измерений, связанных с определением численных параметров математических функций, описывающих экспериментальные физические законы или траектории движения небесных тел. В этой области экспериментальным путем было открыто значительное число законов, относящихся к различным областям физики, а в небесной механике не только удалось рассчитать орбиты комет, но и с помощью численных расчетов указать местонахождение еще одной планеты солнечной системы. Попытки формализовать процессы решения указанных выше задач привели к созданию и развитию математической статистики – науки о методах обработки статистических данных.

Впервые термин «статистика» мы находим в художественной литературе – в «Гамлете» Шекспира (1602 г., акт 5, сцена 2). Смысл этого слова у Шекспира – знать, придворные. В последующие годы в этот термин вкладывали различный смысл. Вначале под статистикой понимали описание экономического и политического состояния государства или его части. Однако постепенно этот термин стал использоваться более широко. Согласно Наполеону, «статистика – это бюджет вещей». Тем самым статистические методы были признаны полезными не только для административного управления, но и для применения на уровне отдельного предприятия. Уже в 1833 г. говорили, что «цель статистики заключается в представлении фактов в наиболее сжатой форме», а в 1909 г. определяли, что «статистика – это численное представление фактов из любой области явлений в их взаимосвязи». Как уже было сказано выше, сразу после возникновения теории вероятности вероятностные модели стали применяться при обработке статистических данных.

В 1794 г. (по другим данным – в 1795 г.) К. Гаусс разработал метод наименьших квадратов, один из наиболее популярных ныне статистических методов, и применил его при расчете орбиты астероида (малой планеты) Церера – для борьбы с ошибками астрономических наблюдений. В середине XIX века бельгийский статистик Л.А.Ж. Кетле и его последователи выявили наличие закономерностей в статистических рядах. В частности, они показали, что из статистических данных можно извлечь закономерности, относящиеся к таким общественным явлениям, как рождаемость, смертность, преступность и т.д. Кетле принадлежит заслуга систематического использования математических методов в обработке статистических данных.

Большую роль в XIX веке в распространении статистических методов на различные области исследований сыграли работы Г. Гальтона, который положил начало применению статистических методов в биологии и психологии. Он также положил начало использованию тестов и анкетирования, применив для их анализа статистические методы, в частности, метод исчисления корреляций и регрессий между переменными. К. Пирсон продолжал исследования Гальтона, став вместе с ним основателем биометрии. Она представляет собой раздел биологии, содержанием которого являются планирование и обработка результатов количественных экспериментов и наблюдений методами математической статистики. Пирсон подробно проанализировал основные типы распределений, встречающиеся в биологии, развил теорию множественной корреляции, предложил один из наиболее распространенных методов проверки гипотез – «хи-квадрат».

Первая треть XX века прошла под знаком параметрической статистики. Под параметрической статистикой понимается теория анализа данных. Основным объектом ее изучения являются наблюдения, которые рассматриваются как члены некоторой выборки из распределений, описываемых одним или небольшим числом параметров. В качестве примера можно привести кривые Пирсона, зависящие от четырех параметров. Здесь необходимо отметить существенный вклад Р. Фишера, который впервые показал, что планирование экспериментов и наблюдений и обработка их результатов – две неразрывно связанные задачи статистического анализа. Он заложил основы теории планирования эксперимента, предложил ряд эффективных методов (в первую очередь, дисперсионный анализ, метод максимального правдоподобия) и развил теорию малых выборок, начатую Стьюдентом.

Другое направление в исследованиях было связано с тем, что впоследствии получило имя *вычислительной (прагматической) математики*. Основными темами исследований в этом направлении были вычисление значений элементарных математических функций, связанное с их табулированием, численное решение различного сорта уравнений, от алгебраических до дифференциальных, численное вычисление интегралов и т.п. Подобные задачи вытекают из необходимости проверки следствий физических теорий на основе имеющихся экспериментально измеренных физических данных, для чего сравнивают эти данные с численными результатами решения указанных выше задач.

Наконец, третье направление было связано с решением так называемых статистических задач, которые возникали в различных областях хозяйственной жизни. Яркими примерами этого являются задачи, возникающие в страховом деле при установлении различных видов страховых премий, а также задачи, связанные с определением различных пособий и пенсий. Основным способом решения задач указанного типа явилось использование теории вероятностей, математической статистики и различных практических методов анализа различного рода статистик.

Если первое и третье направления имели непосредственную связь с изучением реальных объектов, то второе направление имело более тесные связи с теоретической математикой. Интенсивное развитие первого направления произошло еще в XVII веке, когда начался усиленный поиск экспериментальных физических законов. В развитии второго направления необходимо отметить два периода: XVIII век и вторая половина XIX века. В XVIII веке шло усиленное развитие небесной механики, которое требовало проведения значительных численных расчетов, более всего связанных прежде всего с вычислениями значений элементарных математических функций. Вторая половина XIX века потребовала инженерных расчетов, связанных с появлением электротехники и также возникших в результате использования прагматической физики. Инженеры должны были для разработки и производства разного вида электромашин производить расчеты, чтобы предсказать различные параметры, связанные с функционированием этой техники. Отправной точкой для методики проведения необходимых расчетов являлись математические формулы, получаемые на основе определенной физической теории. Однако затем эти формулы уточнялись и видоизменялись в зависимости от экспериментальной проверки. Подтверждение этому легко найти, заглянув в любой практический справочник для электроинженеров.

В заключение можно сказать, что по мере усложнения технических проблем возрастала потребность в прагматической математике, которая служила основой для расчетов. Хотя, в конечном счете, сама методика решения прикладной задачи (например, математической формулы расчета) часто складывалась в результате проведения серий экспериментов.

Таким образом, прагматическая математика начала проникать за стены университетов в другие образованные слои общества, в частности, в среду инженеров и техников различных специальностей, при подготовке которых стали уделять значительное внимание математическому образованию. Для этой цели создавались специальные учебные заведения, отличные от университетов. Математическое образование технической интеллигенции способствовало тому, что она стала широко применять математический язык для описания методов решения практических задач. Кроме того, прагматическая математика служила примером организации мышления при решении возникающих практических задач.

Иногда методики решения практических задач допускали формализацию, которая, хоть и в редких случаях, приводила к построению математических теорий. Примером может служить создание так называемого операционного исчисления, возникшего из формализации методики проведения практического расчета параметров электрических цепей. Это исчисление было предложено О. Хэвисайдом, который никогда не учился в университете. Приведенный случай можно рассматривать одним из первых примеров того, как из решения практических задач рождается математическая теория. Дальнейшая история развития прагматической математики покажет целый ряд математических теорий, связанных с решением практических задач.

Развитие прагматической математики привело также к изменению целей проведения научных исследований. Если в XVII веке основной целью проведения научных исследований было описание физических явлений, то уже в XVIII веке в небесной механике стали решать задачи прогнозирования траекторий движения небесных тел, таких, как кометы и планеты. Как мы уже неоднократно упоминали, высшими достижениями в этом направлении явилось прогнозирование даты появления кометы Галлея и указание местонахождения в конкретные моменты времени двух планет солнечной системы. Спектр задач прогнозирования существенно расширился, когда стали численно решать инженерные задачи, которые по своей сути являются *задачами прогнозирования,* ибо их содержание относится к состояниям реальных объектов в будущих моментах времени.

Закончим этот параграф кратким описанием развития вычислительных машин в этот период. Современный подход к построению вычислительных машин и автоматизации вычислительных работ связан с именем англичанина Ч. Бэббиджа, который сначала предложил и начал строить так называемую «разностную машину», предназначенную для табулирования функций с достаточной точностью, а затем «аналитическую машину». Оба эти проекта он не закончил. Однако его последователи из разных стран, используя его идеи, начиная с середины XIX в. стали создавать вычислительные машины. Так, например, шведы, отец и сын Шютцы построили в 1840 г. первую разностную машину. В последующие годы они создали несколько улучшенных версий этой машины, которые использовались для составления астрономических таблиц. Идеи Бэббиджа, заложенные в аналитическую машину, удалось полностью осуществить только в XX в.

Существенно автоматизировать вычислительные работы, связанные со статистикой народонаселения, удалось американскому инженеру Г. Холлериту, создавшему перфорационный табулятор. Его усовершенствованные варианты стали широко применяться в разных странах.

«Господь бог создал целые числа; все остальное – дело рук человеческих».
Л. Кронекер

8.4. Математические числа.

Как мы уже неоднократно подчеркивали, каждый тип математики обладает собственным типом чисел. Так, прематематика имеет дело с прематематическими числами, греческая теория чисел – с натуральными числами, европейская прагматическая математика — с прагматическими числами, а европейская теоретическая математика – с математическими числами. Выше мы достаточно подробно рассмотрели все перечисленные типы чисел, кроме математических.

Математические числа, по существу, возникли впервые в XVII веке, но окончательное их оформление произошло только во второй половине XIX века. У колыбели этих чисел стоял Декарт, который первый сопоставил с точками координатной оси числа, тем самым создав числовую ось. Числовая ось характеризуется начальной точкой, отрезком на этой оси, который принимается за единицу (масштаб), а также указанием направления, которое принимается за положительное. Противоположное положительному направлению называется отрицательным направлением. Под *одномерным математическим числом* понимается *отношение* между отрезком, одним концом которого является начальная точка, и масштабом. Это отношение называется *положительным* числом, если другой конец выбранного отрезка лежит в положительном направлении от начальной точки, и *отрицательным* числом, если он лежит в отрицательном направлении от начальной точки. Очевидно, что при таком определении все те обычные свойства, которые считаются присущими числам, присущи и математическим числам. Одномерные математические числа называются *вещественными* или *действительными* числами. Подобного подхода к вещественным числам придерживался и Ньютон.

Аналогичным образом определяются *многомерные математические* числа. Для простоты дальнейших рассуждений мы ограничим наше рассмотрение только вещественными числами. Благодаря созданию аналитической геометрии вещественные числа имеют два представления: геометрическое (в виде точки на числовой оси) и аналитическое (символическое представление как объектов алгебры или анализа). Таким образом, в вещественном числе соединилось два начала: геометрическое и аналитическое.

Так как математическое число рассматривалось как отношение двух отрезков, то его не всегда можно было однозначно задать с помощью определенного набора символов, например, цифр. Это означает, что математические числа задаются «неконструктивно». В этом одно из принципиальных отличий теоретической математики от прематематики и прагматической математики, которые используют только числа, однозначно заданные с помощью цифр, т.е. «конструктивно». Это отличие вытекает из самой сути теоретической математики, которая относится к чисто интеллектуальному познанию и оперирует чисто интеллектуальными объектами.

Как мы уже говорили в этой главе, к началу XIX века выявился ряд логических проблем в математическом анализе, и со всей остротой встал вопрос о построении логического фундамента математического анализа с целью доказательства непротиворечивости его основных результатов, которые служили базисом для различных естественнонаучных теорий. В середине XIX века стало ясно, что для этого прежде всего необходима логически непротиворечивая аксиоматическая теория *математических чисел*.

Эта теория должна удовлетворять определенным условиям, которые интуитивно формулировались таким образом, чтобы она не только не входила в противоречие с основными утверждениями математического анализа, но и давала им поддержку и логическое обоснование. В качестве примера можно привести требование, чтобы между точками на действительной оси и математическими числами существовало взаимооднозначное соответствие, удовлетворяющее естественным геометрическим соображениям.

Построение аксиоматической теории математических чисел было закончено в конце XIX века в трудах Дедекинда, Кантора, Пеано. Это явилось осуществлением греческой мечты.

Дедекинд и Кантор, каждый в отдельности, определили набор интеллектуальных объектов, которые могут служить математическими числами. Кантор в качестве математического числа предложил «класс конфинальных последовательностей», а Дедекинд – «сечения». Мы здесь не будем давать точных определений или разъяснений этим понятиям. Важно отметить, что эти интеллектуальные объекты принципиально отличаются друг от друга, что, например, видно из их имен. Объекты Дедекинда носят явно выраженный геометрический характер, в то время как объекты Кантора — чисто аналитический, более абстрактный характер.

Заметим, что математики и тот и другой объект называют «математическими числами». Другими словами, мы имеем различные множества математических чисел. Однако между этими двумя множествами существует взаимооднозначное соответствие, которое сохраняет верными все математические утверждения для одного множества, если они верны для другого. Таким образом, с точки зрения математического анализа эти объекты неразличимы.

Из способа построения математических чисел, который избрал как Дедекинд, так и Кантор, видно, что эти числа являются абстрактными объектами, которым приписаны определенные свойства, вытекающие либо из определений, либо из аксиом. Принципиальным моментом в построении теории математических чисел у этих математиков являлось использование понятия предела. В том и в другом случае математическое число является пределом некой числовой последовательности.

Как абстрактные объекты математические числа не несут никакой содержательной нагрузки. Например, они ни в коем случае не имеют никакой количественной или порядковой сущности. Другими словами, математические числа в определении Дедекинда или Кантора не выражают количеств или порядка.

Множество всех вещественных чисел является наиболее широким множеством чисел, которые мы рассматривали до сих пор. Это означает, что с каждым числом из множества натуральных чисел, множества рациональных чисел или множества прагматических чисел можно однозначно сопоставить некоторое вещественное число, однако существует хотя бы одно вещественное число, с которым мы не можем сопоставить однозначно ни рациональное число, ни прагматическое число.

Основной вопрос, который мы будем здесь обсуждать, и который касается математических чисел, — это вопрос о существовании математических чисел. Более точно, обсуждению подлежит, что именно понимается под выражением «математическое число существует». Выше мы уже сталкивались с тем, что в понятие «существование объекта» вкладывалось разное содержание. И в рассматриваемом случае мы тоже видим, что в это понятие вкладывается разное содержание.

В интеллектуальном познании мы имеем дело с несколькими разными толкованиями термина «существует». Одно толкование заключается в том, что интеллектуальный объект существует, если имеется общественно признанное имя этого объекта. Это означает, что в случае устного языка имеется для этого объекта имя, а в случае письменного языка – группа символов. Это имя позволяет отличить один интеллектуальный объект от любого другого интеллектуального объекта. Другими словами, в рассматриваемом случае два разных объекта *обладают* разными именами. Такое существование интеллектуального объекта назовем *«реальным» существованием*. Например, наиболее широкое распространение в математике получило представление чисел с помощью цифр и вспомогательных символов: точки, запятой и черточки. Числа, которые мы можем представить в виде некого «грамматически правильно записанного» слова, состоящего из цифр и вспомогательных символов, являются «реально существующими» интеллектуальными объектами.

К понятию «реально» существующего математического числа можно подойти и другим путем. Разобьем множество всех интеллектуальных объектов на квалификационные подмножества на основе следующего принципа: каждое квалификационное подмножество состоит только из тех объектов, которые имеют одно и то же имя. Очевидно, что объект является «реально» существующим, если содержащее его квалификационное подмножество состоит из одного элемента.

Имена интеллектуальных объектов существенно зависят от языка интеллектуального познания. Объект может иметь имя в одном языке познания и не иметь имени на другом языке познания. Такая ситуация возникает, когда словарь, позволяющий переводить из одного языка в другой, не дает возможности «перевести» имя из одного языка в другой. Это означает, что в одном случае объект «реально» существует, а в другом случае – «реально» не существует. Например, математическое число, которое представлено в записи как π, нельзя представить в десятичной позиционной системе с помощью конечного числа цифр, т.е. нельзя указать слово, записанное в десятичной позиционной системе, однозначно соответствующее указанному числу.

Для того, чтобы различать две описанные выше ситуации, мы будем говорить, что интеллектуальный объект «реально» существует, если он «реально» существует для любого рассматриваемого языка интеллектуального познания. Если же объект существует только для некоторых из рассматриваемых языков, то мы будем говорить, что он «*условно реально*» существует.

Еще одна ситуация возникает, когда интеллектуальный объект задается с помощью описания его свойств, но не получает при этом никакого конкретного символьного имени, позволяющего его отделить от других объектов, обладающих подобными свойствами. В этом случае объект существует в нашем сознании, но в момент определения мы его не можем конкретизировать. Про такой объект можно сказать, что он «*потенциально*» существует.

Теперь попытаемся определить, какие математические числа, рассматриваемые как интеллектуальные объекты, «реально» существуют, какие – «условно реально» существуют, а какие – только «потенциально» существуют.

Напомним, что у греков под числом понималось только натуральное число. У них, начиная с пифагорейцев, для каждого натурального числа имелась специфическая, присущая только этому числу запись или представление его с помощью камушек. В этом смысле натуральные числа «реально» существуют, ибо любые два представления натуральных чисел в разных позиционных записях можно однозначно перевести одно в другое. Кроме того, у греков натуральные числа никоим образом не были связаны с прематематическими числами. Натуральные числа были чисто интеллектуальными объектами, которые, по мнению некоторых греческих философов, являются первоэлементами. Другими словами, натуральные числа были для этих философов того же сорта объектами, что для других греческих философов – атомы.

Обозначим через **N** множество всех натуральных чисел. Ясно, что на множестве **N** можно определить сложение и умножение любых двух натуральных чисел, обладающих привычными свойствами. Деление и умножение определяется только для ограниченного числа пар натуральных чисел.

Несколько более сложная ситуация имеет место у рациональных чисел. Можно утверждать, что рациональные числа «условно реально» существуют, ибо, согласно определению, их всегда можно представить в виде упорядоченной пары двух натуральных чисел. Такое представление рациональных чисел мы назовем *универсальным представлением* рациональных чисел. Рациональные числа были введены для того, чтобы можно было делить одно натуральное число на другое. Другими словами, рациональные числа – это интеллектуальные объекты, которые были введены для обозначения, прежде всего, результата деления двух натуральных чисел.

Легко видеть, что в любой позиционной цифровой системе записи чисел всегда существуют рациональные числа, которые *не представимы* в этой системе. Это означает, что наборы рациональных чисел, представимых в позиционной цифровой записи по двум различным основаниям, которые взаимно просты друг с другом, нельзя сопоставить между собой. Другими словами, рациональные числа только «условно реально» существуют.

Обозначим множество всех рациональных чисел через Q. Если рациональные числа представимы в виде пар целых чисел, то на этом множестве можно определить естественным образом все арифметические операции.

Обозначим совокупность всех математических чисел, которые представимы в виде конечной строки цифр в десятичной позиционной системе, через Q_{10}. Очевидно, что Q_{10}. является собственным подмножеством множества рациональных чисел. Выше числа из Q_{10}. были названы прагматическими числами. Так как любое число, которое может быть записано в любой позиционной записи чисел, является рациональным числом, то отсюда следует, что ***если число не является рациональным, то его нельзя представить ни в какой позиционной системе***. Отсюда следует, что любое прагматическое число «условно реально» существует.

Ясно, что на множестве прагматических чисел можно естественным образом определить операции сложения, вычитания и умножения любых двух прагматических чисел, которые обладают привычными свойствами. Трудности возникают с делением двух прагматических чисел.

Ситуация усложняется, когда с помощью подхода, описанного в предыдущем пункте, вводятся в рассмотрение алгебраические числа, как корни алгебраических уравнений. Другими словами, алгебраические числа – это интеллектуальные объекты, которые обозначают корни алгебраических уравнений.

Как мы видели в истории, некоторые корни алгебраического уравнения представлялись в виде определенных формул, в которые входят специальные символы (радикалы). Предположим, что нам задан конкретный корень некоего уравнения, представимый в виде формулы. На эту формулу можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, формула представляет собой некий математический объект, с которым можно обращаться на основании определенных правил. В этом случае две формулы представляют один и тот же математический объект, если с помощью разрешенных преобразований они приводятся к одной и той же формуле. Во-вторых, на формулу можно посмотреть как на некоторое представление (запись) определенного числа. В этом случае две формулы равны, если они представляют одно и то же число.

Ясно, что приведенные два подхода принципиально отличаются друг от друга.

Во-первых, формулы являются математическими объектами, которые заданы (представлены), в то время как алгебраические числа (как числа) в качестве математических объектов были определены только в XIX веке доказательством основной теоремы алгебры. (Напомним, что основная теорема алгебры утверждает, что любой корень алгебраического уравнения может быть представлен комплексным числом.)

Во-вторых, любые две формулы можно сравнить друг с другом как числа, и в то же время как могут существовать формулы, которые нельзя сравнить между собой. В современной исторической математической литературе обычно на формулу смотрят как на число. Если конкретный корень представим в виде формулы, то он «условно существует».

Если алгебраическое уравнение не разрешимо в радикалах, то это означает, что существует такой его корень, который нельзя представить в виде формулы, в которую входят определенные символы. То есть, что этот корень не является «условно реально» существующим, а только «потенциально» существует. Известно, что есть уравнения пятой степени, которые неразрешимы в радикалах (т.е. существует корень этого уравнения, который не представим формулой). Отсюда следует, что можно указать алгебраические числа, которые «потенциально существуют». Но тогда алгебраические числа, по своей сути, отличаются от рациональных чисел как интеллектуальные объекты.

Возникновение математического анализа привело к тому, что появилась необходимость введения новых интеллектуальных объектов, которые как бы дополняли уже существующие числа. Эти новые объекты наделили характеристиками, похожими на те, которыми обладали существовавшие до тех пор числа. В силу этого факта такие новые объекты также стали называть числами.

Формальное математическое построение этих чисел было в чем-то аналогичным построению алгебраических чисел. Новым числом объявлялся предел *бесконечной* сходящейся последовательности рациональных чисел. Оно получило имя «действительное» или «вещественное». Все «старые» числа также можно представить как предел числовой сходящейся последовательности, т.е. их также можно рассматривать как действительные числа. Было доказано, что такое определение *не входит в противоречие* со всеми истинными утверждениями, относящимися к прежним числам. Во-первых, что действительных чисел больше, нежели рациональных чисел, а, во-вторых, любое действительное число, не являющееся рациональным, «потенциально» существует.

Обозначим через **R** множество всех действительных чисел. На этом множестве естественно определяются все арифметические операции.

В заключение этого параграфа сделаем несколько «философских» замечаний.

Во-первых, с чисто формальной стороны, натуральные числа греческой математики и натуральные числа, рассматриваемые как действительные, представляют собой *совершенно разные интеллектуальные объекты.* Натуральные числа – это числа, содержание которых связано с мистикой, с определенным смыслом. Напомним слова Евклида (IV в. до н.э.): «Число – множество, состоящее из единиц. Единица же – есть то, вследствие чего существующее становится единым». Сравните с тем, что писал Ньютон в XVIII в. н.э. в своей «Всеобщей арифметике»: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой за единицу». И, наконец, по Кантору (XIX в.): «Число – это класс конфинальных последовательностей».

Все другие числа, о которых мы говорили в этом параграфе, отличаются друг от друга своей природой и своим назначением. То, что их объединяет, — это существование взаимооднозначного соответствия между числами разной природы, которое сохраняет основные арифметические операции.

Во-вторых, действительные числа появились в связи с необходимостью построить непрерывную числовую функцию. Образно говоря, действительные числа – это интеллектуальные объекты, которыми «заполнили» промежутки между двумя рациональными числами.

Как мы отмечали выше, при своем рождении математический анализ имел «близнеца» — теоретическую физику. Эта двойственная ситуация наложила отпечаток и на понятие непрерывной функции. С одной стороны, непрерывная функция – это след от движения материальной точки (физическое толкование), а с другой стороны – набор точек (математический смысл). С одной стороны, числовая ось — это набор чисел-точек (атомная гипотеза), а с другой — бесконечная делимость отрезка (полевая гипотеза). Здесь мы вернулись к спорам древних греков о смысле понятия непрерывности. Возникшая двойственная ситуация и привела к тому, что ученые были вынуждены на формально-логическом уровне разделить между собой математическую и физическую непрерывности.

Появление и использование математической непрерывности привело к принципиальной неоднозначности в построении оснований математики. Опять же мы сталкиваемся со старой проблемой о сути континуума. Введение математической непрерывности не разрешило проблемы двойственности отношения к происхождению числовой прямой, о которой уже неоднократно говорилось выше. Эта неоднозначность поставила под сомнение основной логический принцип непротиворечивости, на котором зиждется весь фундамент научного мышления.

В-третьих, в силу того, что значительная часть действительных чисел «потенциально» существует, то возникает вопрос: что значит «вычислить значение функции»? На этот вопрос, который широко распространен в современной математике, нельзя ответить в рамках теоретической математики, ибо в этих рамках оперируют только математическими рассуждениями на основании аксиом. В рамках теоретической математики существуют только две возможности. Первая — можно доказать или опровергнуть следующее утверждение: число a является значением функции $f(x)$ при значении $x=b$. Или, другими словами, доказать или опровергнуть, что $a = f(b)$. Правда, подобное утверждение является достаточно сложным, ибо часто отсутствует критерий, с помощью которого можно определить, является ли конкретное число значением функции в требуемой точке. Вторая возможность — можно утверждать, что $a = f(b)$ согласно определению. Но тогда задача вычислить значение а функции $f(x)$ при значении $x = b$ *не является математической задачей, относящейся к теоретической математике.*

В-четвертых, аналогично тому, о чем мы говорили выше, задача — численно решить уравнение $f(x) = 0$, т.е. найти численное значение корней этого уравнения, — не является математической задачей в рамках теоретической математики. Это утверждение вытекает из того, что численное решение указанного уравнения не является доказательством. С другой стороны, задачу — доказать или опровергнуть, что $x = a$ является корнем уравнения $f(x)$, — можно рассматривать как математическую в рамках теоретической математики. Все, что мы только что сформулировали, относится к уравнениям любого вида: алгебраическим, дифференциальным, интегральным и т.п.

8.5. Европейская математика: выводы.

Трудно найти в истории человеческой цивилизации такой период ее интеллектуального развития, который был бы подобен XVII веку в Западной Европе. С определенным ограничением его интеллектуальное влияние можно сравнить с влиянием греческой интеллектуальной революции, если сжать ее три века (VI—IV вв. до н.э.) в один век. Единственным (но важным) исключением является то, что греческая интеллектуальная революция затронула и все виды искусств (литературу, скульптуру, архитектуру, театр), в то время как в Западной Европе революция в искусстве произошла во время Возрождения, т.е. на один-два века раньше.

Результаты европейской интеллектуальной революции можно рассматривать со многих сторон. Нас же в рамках этой книги интересуют только две, одну из которых условно назовем общественной стороной, а другую – научной. Основным результатом этой революции с общественной стороны явилась замена авторитета церкви на авторитет науки.

«Авторитет науки, признаваемый большинством философов новой эры, весьма существенно отличается от авторитета церкви, ибо он пользуется средствами исключительно интеллектуальными, не опирающимися на аппарат управления. Никакие кары не обрушиваются на головы тех, кто отвергает авторитет науки; никакие соображения выгоды не влияет на тех, кто его принимает. Он завоевывает умы исключительно присущим ему призывом к разуму. Другой чертой, отличающий авторитет науки, является то, что он как бы соткан из кусков и частичек, а не представляет собой, подобно канону католической догмы, цельной системы, охватывающей человеческую мораль, человеческие надежды, прошлую и грядущую историю вселенной. Авторитет науки высказывает свое суждение только о том, что в данный момент представляется научно установленным, а это составляет крошечный островок в океане неведения. Авторитет науки еще в одном отношении отличается от церковного авторитета, который провозглашает свои суждения абсолютно верными и неизменными во веки веков; суждения науки высказываются в порядке эксперимента, на основании вероятности, и признаются подверженными процессу изменения. Это порождает склад ума, отличный от склада ума средневекового догматика». (Б. Рассел, 53, с. 510)

Повышение авторитета науки привело к резкому росту значения индивидуальности, а вместе с ней и субъективности в научных исследований. Философский фундамент этому заложила прежде всего философия Декарта, которая всякое познание ставит в зависимость от достоверности собственного существования, а критериями истины считает ясность и отчетливость (понимаемые в субъективном смысле).

Индивидуализм и субъективность особенно ярко выражены в теоретической математике, где выбор темы исследования и метода исследования полностью зависит от личности математика. Введение различных новых математических понятий, выбор утверждений для доказательства – все это результат личных предпочтений исследователя. Бурное развитие математики в XVIII—XIX вв. хорошо иллюстрирует сказанное.

Теперь обратим наше внимание на научную сторону интеллектуальной революции, связанную с развитием математики. Одним из результатов этой революции было создание европейской математической науки, завершившееся только в XIX веке, которая объединяет под одним названием три принципиально разные математики: европейскую теоретическую математику, европейскую прагматическую математику и математическую логику. Бурное развитие экспериментальной физики и астрономии, появление первых экспериментальных физических законов и законов Кеплера изменили подход к математике.

Создание математического анализа стало возможным только после появления аналитической геометрии и понятия математической функции. Такого соединения геометрии и алгебры греки не знали и не могли знать, ибо у них было совершенно другое отношение к математике, а также вообще к науке. Греки рассматривали математику как средство для *объяснения* природы, в то время как европейцы видели в математике язык для *описания* процессов, происходящих в природе. К измененной цели греческая математика полностью не подходила, поэтому возникла потребность в создании новой математики.

К этому времени вся подготовительная работа к созданию новой математики была проведена: появилась аналитическая геометрия, которая соединила алгебру с геометрией, создав язык, удобный для описания движения, введено было понятие функции, которое стало основным инструментом новой математики, создан символический язык алгебры, что позволило упростить изучение функций, и т.п.

Европейская теоретическая математика, т.е. математический анализ в широком понимании этого слова (сюда входят все математические дисциплины, основанные на использовании понятия непрерывной функции), с момента своего рождения играла двойственную роль. С одной стороны, математический анализ был видом математики, где происходило изучение математических объектов, а с другой — он был языком естествознания, т.е. служил языком для описания зависимостей между физическими объектами, с помощью которых изучались физические явления.

Математический анализ в первые столетия своего существования не имел строгой логической базы, т.е. многие его основные утверждения не подтверждались логическими рассуждениями. Другими словами, в полученные математические результаты больше верили, нежели их логически обосновывали. Эта вера была основана на успехах математики в описании и предсказании явлений природы. Эта вера была столь внушительная, что все мыслители XVIII века с еще большим убеждением, чем древние греки, выдвигали тезис о существовании основанной на математических принципах системы мира и превозносили математику как великолепный продукт человеческого разума.

Замечательный норвежский математик Н.Х. Абель так описывал ситуацию, сложившуюся в математическом анализе:

«В нем не чувствуется плана, полностью отсутствует всякая система. Странно, что столько людей занимается математическим анализом. Хуже всего, что в нем ничего не рассматривается строго. В высших разделах анализа имеется лишь несколько теорем, доказанных с более или менее приемлемой строгостью. Повсюду встречаются жалкие заключения от частного к общему. Странно, что такой способ мышления не привел к гораздо большему количеству парадоксов».

Связь математического анализа с естествознанием, которое могло экспериментально проверять свои теории, дала содержательное обоснование этой науке, как бы «узаконила» ее, без проверки на логическую непротиворечивость. Но к началу XIX века этого обоснования стало не хватать, и появилась необходимость подвести прочный логический фундамент под те разделы математики, где он отсутствовал, исключить противоречия и те понятия, которые не имели четких определений.

Построение логического фундамента математики происходило одновременно в двух направлениях. Первое направление было связано с анализом основных понятий математического анализа, с их упорядочиванием и уточнением. Второе же заключалось в построении и уяснении логических принципов, на которых должен основываться формальный фундамент математики.

В трудах Коши, Вейерштрасса и других математиков были уточнены все основные понятия математического анализа, такие, как предел, непрерывность и т.п., исправлены и уточнены большинство основных его утверждений, и к началу последней трети XIX века эта работа практически была закончена.

При уточнении основных понятий математического анализа выявилась необходимость в уточнении понятия математического числа. Начиная с Декарта, оно было тесно связано с понятием числовой оси. Эта связь придала двойственный характер математическому числу: с одной стороны, число — это точка на числовой оси, а, с другой стороны — это отношение двух отрезков. Двойственная природа математического числа, которую мы также наблюдаем в теориях Дедекинда и Кантора, вернула нас к старым проблемам континуума, которые волновали и тревожили древних греков, видевших в них основу возможных будущих внутренних противоречий. В этой ситуации четко просматривается столкновение дискретности и непрерывности.

В начале XIX столетия стало ясно, что логических средств, заложенных в логике Аристотеля, недостаточно для того, чтобы построить теорию математического доказательства в рамках математического анализа. Существование непрерывности, а также использование понятия функции потребовали введения в рассмотрение новых математических инструментов. Трудами Буля, де Моргана, Пирса, Фреге и др. были введены такие логические понятия и принципы, что позволили создать ***математическую логику***, частью которой была теория математического доказательства. Распространение логики на все типы математических рассуждений, придание утверждениям большей точности за счет проведения различий между логическими понятиями, введение кванторов, все это несомненно, способствовали повышению математической строгости, к которой так стремились математики XIX века.

Математическая логика представляет собой совершенно новый тип математики. Логика Аристотеля, которая заложило начало этой науки, не была математической дисциплиной, а лишь набором правил рассуждений, приемлемых в математике. Для создания математической логики необходимо было изобрести специальный символьный язык, строго определить объекты исследования, выстроить некую систему аксиом, а также правила проведения рассуждений в рамках математической логики. Таким образом, математическая логика стала одним из типов математики.

Так как математическая логика «диктует» правила для теоретической математики, то в этом случае можно говорить, что математическая логика является метаматематикой.

Наконец, последним важным шагом в построении логического фундамента европейской математики было создание Пеано аксиоматической теории чисел. Этот процесс начался в 20-х годах XIX столетия и к концу этого столетия успешно закончился, несмотря на то, что математикам не удалось построить единый логический фундамент теоретической математики.

Отсутствие логического единства мало мешало математикам, занимающимся математической физикой, получать все новые фундаментальные результаты и стро-ить теории, связанные с тем или иным естественнонаучным явлением.

Трудности к теоретической математике пришли с неожиданной стороны. В последней трети XIX века были сделаны серьезные попытки построить математиче-ские теории в области политической экономии. Ученые-экономисты пытались создать теории, похожие по своей математической сути на механистические теории в физике. Несмотря на то, что они заполнили ряды книг, а также многочисленные страницы учебников для экономистов, создать теорию, которая отвечала бы нуждам экономической науки, как отвечает теоретическая физика проблемам физической науки, им, по большому счету, не удалось.

Возникшая ситуация объясняется несколькими причинами. *Во-первых*, в большинстве экономических задач, которые возникают в практической жизни, необходимо прогнозировать, а не объяснять или описывать. Другими словами, основная цель экономической науки заключается в предсказании будущей ситуации при различных условиях, а не в объяснении или описании.

Во-вторых, перенести механистический дух, который господствовал в естествознании, нельзя по аналогии или подобию перенести в экономику, ибо обычно экономические характеристики ведут себя по-другому, нежели физические. Это значит, что для построения математических моделей экономических процессов необходима другая математика, нежели математический анализ.

В-третьих, в то время не существовала экономическая статистика, т.е. измерения экономических характеристик, в достаточной степени, чтобы можно на реальных данных проверять соответствие экономических теорий действительности.

В-четвертых, нет никакой возможности проводить экономические эксперименты, подобные физическим.

Можно привести и еще ряд причин, что мы сделаем в следующих главах. Но уже приведенных причин достаточно, чтобы сказать, что европейская теоретическая математика не подходит для построения математических экономических теорий.

Наряду с европейской теоретической математикой возникла ***европейская прагматическая математика***. Этот тип математики возник прежде всего для выведения экспериментальных физических законов, исходя из полученных наблюдений за характеристиками физических явлений. Основное направление этой науки — производство вычислений. В этом принципиальное различие между теоретической математикой и прагматической математикой: если теоретическая математика предназначена для описания естественнонаучных явлений, то прагматическая математика предназначается для вычисления. Если целью теоретической математики является доказательство утверждения, то цель прагматической математики заключается в получении конкретного числового решения задачи.

Среди основных задач, которые характерны для прагматической математики, можно выделить следующие: вычисление значений функций, численное решение уравнений, нахождение числовых параметров математических функций по наблюдениям или заданным значениям зависимых и независимых переменных.

Роль прагматической математики с середины XIX века стала постоянно возрастать из-за того, что растущий технологический прогресс требовал все увеличивающихся объемов инженерных расчетов. В связи с этим стали изучать математику сначала в специальных учебных заведениях и университетах, а затем и в школах.

В отличие от теоретической математики, прагматическая математика далеко вышла за пределы естествознания. Во-первых, с расширением общего математического образования прематематика стала вливаться в прагматическую математику, ибо в ней стали использовать математические формулы. Во-вторых, потребности страхового дела вызвали к практической жизни теорию вероятностей и математическую статистику. Теория вероятностей, которая выросла из анализа результатов азартных игр, во второй половине XIX века стала играть все возрастающую роль не только в статистических экономических исследованиях, но в социологии, психологии и т.п. Отношение к этой науки в рассматриваемый период хорошо выразил один из крупнейших математиков того времени П. Лаплас:

«…Теория вероятностей, по своей сути, есть нечто иное, как здравый смысл, сведенный к вычислениям; она позволяет нам точно оценивать то, что разум чувствует инстинктивно, часто не будучи в состоянии объяснить это… Замечательно, что наука, началом которой были рассуждения об азартных играх, должна стать одним из важнейших предметов человеческого знания» .

Часть 4. Мировая интеллектуальная революция и мировая математика.

В отличие от религии научная техника в этическом отношении нейтральна: она вселяет в людей уверенность в том, что они в состоянии творить чудеса, но не указывает им, какие чудеса следует творить.

Б. Рассел

Как известно большинству математиков по собственному опыту, многое из того, что одно поколение математиков считает надежным и удовлетворительным, имеет шанс обратиться в тончайшую паутину под пристальным взором следующего поколения… Знания как в некотором смысле разумного общего соглашения по вопросам обоснования математики, по-видимому, не существует… Ясно одно: одинаково компетентные специалисты разошлись и продолжают расходиться во мнениях по поводу простейших рассуждений, хоть в малейшей степени явно или неявно претендующих на универсальность, общность или неоспоримость.

Э. Белл

Глава 9. Мировая интеллектуальная революция.

9.1. Вторая треть XX в.

Вторая треть XX века богата событиями, которые потрясли весь мир. Начало второй трети XX века совпало с мировым экономическим кризисом, который был связан с последствиями первой мировой войны. Этот кризис возник из-за создавшейся финансовой ситуации в США и привел к перепроизводству промышленной и сельскохозяйственной продукции и к обострению социальных проблем в разных странах. В середине этой трети мир пережил вторую мировую войну, которая сопровождалась почти полным уничтожением экономической, социальной и политической структуры основных европейских стран. Большие потери понес и СССР. Огромное впечатление на весь мир произвела атомная бомбежка Японии, когда в течение нескольких минут были уничтожены два города и убито несколько сот тысяч человек. И, наконец, конец второй трети застал в разгаре холодную войну, развал колониальных империй и первые космические полеты.

Первое крупное событие XX в., которое потрясло мир, была первая мировая война, в которую были втянуты практически все крупные страны, разделенные на два лагеря. Эта война продолжалась более четырех лет, причем с двух сторон участвовали многомиллионные армии, а военные действия происходили на значительной части Европы. Эти военные действия потребовали значительных человеческих и материальных усилий воющих стран. Результаты войны были катастрофическими: миллионы убитых и покалеченных, громадные разрушения, экономика ряда стран была уничтожена почти полностью, что привело к серьезным внутренним социальным и экономическим трудностям после войны. Для преодоления некоторых из этих трудностей потребовалось международное сотрудничество. Первая мировая война показала глубокую зависимость не только между государствами и их колониями, но и зависимость групп государств друг от друга.

Вторым крупным событием XX столетие, которое не в меньшей степени, чем мировая война, оказало влияние на весь цивилизованный мир, явился мировой экономический кризис, начавшийся в 1929 г. Этот кризис продолжался, по крайней мере, до 1933 г. В некоторых странах выход из кризиса потребовал больше времени. Он был самый продолжительный и самый жестокий из всех экономических кризисов, которые сотрясали экономики развитых стран до этого времени.

Начало мирового экономического кризиса был полной неожиданностью для руководителей развитых стран, что свидетельство о полном банкротстве тех экономических взглядов, которые господствовали в то время в экономической науке и которыми руководствовались экономические руководители стран. В основе этих взглядов лежал экономический либерализм, который заключался в полном отказе от вмешательства государства в экономическую жизнь, предоставив полную свободу силам, действующих на рынке, самим выяснять отношения между собой.

Западные экономики смогли выйти из кризиса только благодаря интенсивному вмешательству государства в управление экономикой. Теоретической базой этого вмешательства стало учение Дж. М. Кейнса. Теорию Кейнса называют теорией эффективного спроса, выделяя тем самым главную идею, состоящую в том, чтобы через активизацию и стимулирование совокупного спроса (общей покупательной способности) воздействовать на производство и предложение товаров и услуг, повысить уровень занятости. Значение этой теории заключается не просто в пересмотре традиционных подходов к анализу процессов экономического развития. Кейнс заложил общетеоретические основы исследования функциональных зависимостей и взаимосвязей реальных экономических величин как агрегированных категорий, показал их влияние на ход и тенденции экономического развития.

Кейнсианская революция предполагает использование активной экономической политики, учет социальных, психологических, организационных факторов. Заслуга Кейнса в том, что он разработал новую теорию регулирования производства и занятости. Он предложил способы корректировки рыночного механизма с помощью государственного макрорегулирования. Кейнсианская теория оказала существенное воздействие на направления и сферы дальнейших исследований. Она стимулировала разработку системы национальных счетов. С идеями Кейнса связаны обоснование основ антициклической политики, концепция дефицитного финансирования, создание системы среднесрочного программирования.

Проведение новой государственной политики потребовало создание системы государственных органов и организаций, которые, с одной стороны, финансировались из государственного бюджета, а с другой стороны находились под контролем законодательных органов. Это сочетание потребовало совершенно нового строения управления этими организациями, основанного на планировании и текущей отчетности. Организация планирования выявила потребность в экономической и социальной статистике, как на общегосударственном уровне, так и на местном уровне. Кроме того, появилась необходимость в разработке моделей планирования, включая моделей прогнозирования на различные сроки. В ряде стран, особенно, в США, для удовлетворения указанных нужд были созданы специализированные организации, включая статистические и научно-исследовательские центры, в которых были разработаны методики сбора и обработки статистической информации, а также новые типы математических моделей, таких, как, например, модель межотраслевого баланса и эконометрические модели.

Третьим событием XX в., которое оказало существенное влияние на развитие человеческой цивилизации, была вторая мировая война. Эта война нанесла колоссальный человеческий и материальный ущерб всем крупным странам мира, значительно более крупный, нежели ущерб от первой мировой войны. Если первая мировая война проходила в Европе, то вторая мировая война уже проходила на трех континентах: в Европе, Азии и Африке. Закончилась эта война атомной бомбардировкой двух японских городов, в результате которой погибло насколько сотен тысяч человек. Эта бомбардировка произвела глубокое впечатление на все человечество, прежде всего, той легкостью, с которой были в течение нескольких минут разрушены многотысячные города и уничтожено значительное количество людей.

Одним из последствий этого события было появление мистического ужаса перед наукой и учеными, которые оказались способными создать столь эффективное оружие, которое угрожало существованию человечества в целом. Этот ужас определил новое отношение к ученым не только со стороны общественности, но, что не менее важно, и со стороны правительств, которые стали широко финансировать научно-исследовательские работы в области вооружений и военной политики. С этого момента научно-исследовательские работы в области вооружений и военных доктрин стали флагманом научно-технического прогресса человечества.

Так как в военных действиях участвовали многомиллионные армии, то их материальное и человеческое обеспечение потребовало быстрое развитие значительных промышленных и сельскохозяйственных производств, мобилизации колоссальных материальных и финансовых ресурсов. Для управления этими операциями правительства воюющих стран стали применять новые методы управления.

С окончанием войны началось восстановление экономик стран Европы и Азии, пострадавших в ходе военных действий. Были организованы международные проекты экономической помощи пострадавшим странам. Принципиальной трудностью в этом процессе расширения международного сотрудничества являлось разделение мира на два противостоящих лагеря, между которыми началась холодная война за гегемонию в отдельных частях земного шара, которая в значительной степени закончилась только в конце XX столетия.

Холодная война, которая проходила между двумя лагерями, оказала значительное влияние на экономическое, социальное и научное развитие стран. Необходимость вести эту войну оправдывало достаточно агрессивное вмешательство государственных органов в экономическую жизнь страны. Это вмешательство происходило, прежде всего, в виде направления и централизованного финансирования оборонной промышленности. Построение новых заводов и реконструкция старых заводов для выполнения определенных оборонных заказов по созданию новой военной техники стало инструментом для регулирования экономических и социальных проблем на разных уровнях.

Разработка новых видов вооружения послужила основанием для расширения финансирования различных научных исследований, как в университетах, так и в частных компаниях. По существу, в экономиках развитых стран создались целые отрасли экономики, в которых были заняты массы людей, занимающихся научно-исследовательской работой в области вооружений. Результаты этих разработок способствовали быстрому научно-техническому прогрессу и в различных отраслях народного хозяйства, которые не были напрямую связанными с военными нуждами.

В течение последующих десяти лет экономики всех стран достигли и превзошли довоенный уровень развития своих экономик. Научно-технический прогресс оказал существенное влияние на развитие человечества. Нет сегодня такой отрасли экономики или стороны повседневной жизни человечества, которая не ощутила благотворного влияния научно-технического прогресса. Человечество вышло в космос, создало новые источники энергии, передвижения, связи, удлинила срок жизни людей и т.д. и т.п. Только перечисление всех достижений человечества за последнее столетие может занять значительное количество страниц.

Несмотря на существовавшие и существующие противоречия между государствами, XX в. характеризуется все возрастающим международным сотрудничеством в различных областях человеческой жизни. Если в начале XX века крупные государства были в значительной степени экономически независимы друг от друга, то в конце этого века между крупными государствами протянулись глубокие экономические связи. Если в начале XX века любое государство решало свои внутренние проблемы без оглядки на другие государства, то в конце этого столетия при решении крупных внутренних проблем практически каждое государство должно было брать в расчет реакцию других государств и международных организаций на эти действия. Более того, обнаружилось, что для решения ряда проблем, возникающих перед человеческой цивилизацией, необходимо международное сотрудничество и взаимопомощь. Поэтому в XX в. были созданы многочисленные международные организации сотрудничества в различных сферах.

… есть ли что милей на свете,
Чем уноситься в дух иных столетий
И умозаключать из их работ,
Как далеко шагнули мы вперед?

И.В. Гете

9.2. Мировая интеллектуальная революция.

Все экономические, политические и социальные события, которые происходили в мире, начиная со второй трети XX века, не могли не отразиться на интеллектуальном состоянии человечества, которое неразрывно связано с развитием научного мировоззрения. К началу второй трети этого века, с одной стороны, можно наблюдать кризисные явления в общем научном мировоззрении и в основных теоретических науках, а с другой стороны, появились новые потребности для интеллектуального вмешательства.

В теоретической математике, теоретической физике и в теории познания наблюдался кризис. В теории познании началось усиленное влияние логического позитивизма, влияние идеалистической философии в теории познания резко уменьшилось. Новые философские теории не были никак не связаны с чисто теоретическими науками, которые не были основаны на конкретных опытах.

В теоретической физике уже не существовало единого взгляда, позволяющего построить общую теорию физических явлений: теоретическая физика раскололась на детерминистскую физику и на вероятностную физику. Более того, она все больше распадалась на ряд различных теорий, которые объясняли только те или иные физические явления

Теоретическая математика тратила значительные интеллектуальные усилия, пытаясь построить твердый фундамент под свои основы. Бурное развитие чистой математики шло, в определенной степени за счет прикладной теоретической математики.

Теоретическая экономия не выдвинула практически ни одной идеи, соответствующей экономическому состоянию общества. Все экономические теории были плодом только интеллекта без всякой связи с действительностью.

Все основные достижения европейской науки сосредоточились в развитии европейской прагматической науки, которая обслуживала инженерию и экспериментальные науки.

Практически до этого времени все основные интеллектуальные силы человеческого общества были направлены на изучение природы. Затраченные интеллектуальные усилия дали положительные результаты, которые были выражены, прежде всего, в достижениях технологического прогресса человеческой цивилизации. Бурное развитие различных технологий, направленных на удовлетворение не только имевших ранее потребностей, но и вновь возникших, что позволило улучшить условия человеческого существования, качество жизни человека, удлинить его физическую жизнь.

Мировой экономический кризис выдвинул перед человечеством на первый план новый тип задач, связанный с экономическим управлением на различных уровнях, но, прежде всего, на макроэкономическом уровне. С подобными задачами европейская теоретическая наука, созданная для описания естественных явлений, до сих пор серьезно не встречалась. Все попытки создать политическую экономию на принципах европейской теоретической науки, по существу, окончились неудачей.

Если в течение нескольких веков внимание общественности было сосредоточено на изучении и использовании природных явлений, то теперь основным направлением стали вопросы экономического и социального управления человеческим обществом. Задачи, которые возникали в этом направлении, принципиально отличались от задач, с которыми сталкивалась европейская наука при изучении природы. В качестве примера такого отличия можно привести следующее различие. Результаты исследований в области естественных наук допускают проверку экспериментальным путем, причем эксперимент часто можно было повторить, в то время в области экономики трудно рассчитывать на постановку экспериментов, проверяющих ту или иную теорию.

Возникшие проблемы, прежде всего, относились к двум сферам жизни государства: к социоэкономической сфере и к военной сфере. Если в социоэкономической сфере проблемы касались выработки социальной и экономической политики в управлении, то в военной сфере проблемы были связаны с разработкой и производством новых видов вооружений, а также с разработкой военных доктрин. Так как государство финансировало научные исследования, то оно основные научные ресурсы направило на решение проблем в указанных выше сферах.

Новые проблемы были связаны с необходимостью принятия таких решений, последствия которых могли оказать резко отрицательный эффект и привести к социальным, политическим и экологическим потрясениям. Другими словами, появилась острая необходимость *предсказывать* (*прогнозировать*) последствия в будущем принятых тех или иных решений на различных уровнях народного хозяйства и управления. Это означает, что решение новых задач связано со сравнением различных альтернатив, которые возникают в процессе решения. Существовавшие до этого времени методы решения возникавших практических задач на любом уровне управления и экономике не могли дать удовлетворительного решения, ибо все эти методы не были приспособлены к оценке и изучению будущих ситуаций.

Да и сам процесс решения новых задач отличался от процесса решения естественнонаучных задач. Отметим некоторые из этих принципиальных отличий. Во-первых, если целью ученых-естествоиспытателей было нахождение теории, описывающей то или иное естественное явление, то проблемы, связанные с управлением, обычно заключаются в обосновании выбора того или иного управленческого решения. Во-вторых, если ученый сам формулировал себе задачу для исследования, причем не указывал временные рамки для решения этой задачи, то при решении задач, связанных с управлением, формулировку задачи и временные рамки для ее решения ученый уже не устанавливает. В-третьих, если до начала XX века естественнонаучные проблемы решались, по существу, отдельными учеными, то проблемы управления, в зависимости от уровня управления, являются комплексными проблемами, в процессе решения которых уже участвуют коллективы ученых и специалистов.

Для иллюстрации сказанного приведем пример Советов по исследованиям. Уже во время первой мировой войны были созданы специальные организации, поддерживаемые правительством и заботящих об участии науки в решении различных проблем, диктуемых войной. Эти новые организации, так называемые Советы по исследованиям, оказались очень полезными, так что после войны они были укреплены и созданы в других странах. Их задача – способствовать, координировать, а в некоторых случаях и осуществлять научно-исследовательские работы с учетом потребностей страны, ее природных ресурсов, наличных средств и квалифицированных специалистов. Ясно, конечно, что если общие цели всех Советов по исследованиям примерно одинаковы, то их внутренняя структура в разных странах различна в соответствии с политическими и экономическими условиями и сложившимися традициями. Первые Советы по исследованиям возникли в Великобритании и США. Постепенно они появились и во всех странах, заинтересованных в развитии научных исследований.

Как мы уже отмечали выше, в прошлом столетии ученый был полностью свободен в выборе темы своих исследований. Теперь такую свободу сохранили только ученые-одиночки, которых становится все меньше; это те, кто располагает значительными финансовыми средствами, необходимых для современных научных исследований. Такой свободой не могут располагать ученые, работающие в современных исследовательских организациях. Даже научно-исследовательские организации крупных промышленных компаний, в конечном счете, зависят от государства. Таким образом, именно государство оказывает значительное влияние на планирование научных исследований, определяя создание научных утверждений, выбор их местоположения, ассигнование фондов, подбор, подготовку и использование кадров, а также требуемый порядок работы и тематику исследований. Отсюда следует, что значительная часть современных научных исследований характеризуются двумя особенностями: они коллективные и планируются государством.

Во второй половине XX века и крупные частные компании стали делать капиталовложения в научные исследования во все возрастающих размерах. Это связано с тем, что лицо современного рынка определяется, прежде всего, крупными компаниями, выпускающими сложную технику – автомобили, самолеты, подлодки, ракеты и спутники, системы связи, компьютеры и т.п. Формирование новой модели продукта всякий раз требует научных изысканий и конструкторских разработок, создания новых технологий и материалов специализированного назначения и т.д. От начала изысканий до выпуска первых промышленных образцов обычно проходят годы. Поэтому необходимо не только тщательное изучение рынка, но также прогнозирование спроса, цен на сырье и т.д., ибо только в этом случае можно загодя заключать контракты на научные и конструктивные разработки, на поставку сырья, на строительство производственных площадей. Все это является плодом коллективной работы специалистов, которые только и могут определить, что, как, когда и в каких размерах производить. И современное промышленное производство требует специальной квалификации от управленцев.

Стремление обеспечить новые научные потребности и привело к третьей интеллектуальной революции, которая началась во второй трети XX века и, по всей вероятности, продолжается и сейчас. Эта революция в корне изменила не только общее направление научных исследований, но и методологию этих исследований. Если до второй трети XX века основные направления научных исследований были связаны с естествознанием, то, начиная со второй трети XX века, центр тяжести в научных исследованиях был перенесен на решение проблем государственного, корпоративного, социального управления. В силу того, что революция происходила в одно и то же время в разных странах, причем ученые разных стран сотрудничали друг с другом, то мы ее будем называть ***мировой интеллектуальной революцией***.

Изменение направленности научных исследований, появление принципиально новых постановок научных задач потребовало принципиального изменения существовавшей методологии. Необходимость новой научной методологии была вызвана тем, что прежние методы решения естественнонаучных проблем не давали никаких инструментов для решения вновь возникших задач, в частности, в области прогнозирования.

Важно отметить, что и европейская методология позволяла решать задачи прогнозирования. Ярким примером такого прогнозирования служат те расчеты движения планет и комет, которые позволили предсказать в определенное время и в определенном месте появление комет и неизвестных планет. Однако этот тип прогнозирования являлся следствием определенной теории, которая была проверена на значительном числе экспериментальных данных. Более того, работа исследователя по получению прогноза заключалась в приспособлении теории к нуждам конкретной задачи и проведении вычислений без ошибок. Другими словами, субъективный фактор в этом случае был сведен к минимуму, ибо любой другой исследователь подобного уровня мог проделать ту же работу и получить подобный результат.

При изучении, например, экономических систем мы сталкиваемся с другим типом прогнозирования. Во-первых, может не существовать (это наиболее вероятно) теории, которая была бы проверена на значительном числе экспериментальных данных, позволяющих произвести прогноз. Во-вторых, в самом процессе прогнозирования принципиально используются знания и интуиция исследователя. Другими словами, результат прогноза существенно зависит от того, кто его производит. Это означает, что в процессе прогнозирования имеется существенное влияние субъективного фактора. Поэтому основная задача этой новой научной методологии заключается в уменьшении влияния субъективного фактора в процессе принятия управляющих решений.

Здесь напрашивается интересное сравнение. Греческая научная методология возникла, в частности, в процессе противопоставления религиозной или мистической методологии для объяснения внешнего мира. Греческая научная методология полностью исключила мистический и субъективный фактор из этого объяснения. Европейская научная методология также исключила субъективный фактор из описания физических явлений. И только мировая научная методология стала включать, изучать и использовать субъективный фактор в своих исследованиях.

Создание новой научной методологии и разработка на ее базе новой науки, состоящей из различных конкретных научных дисциплин, и является одним из результатов интеллектуальной революции. Новый тип науки называется ***мировой наукой*** прежде всего потому, что в ее создании участвовали и участвуют ученые многих стран, которые активно сотрудничают друг с другом. Значительный вклад в создание этой науки внесли ученые США, где раньше всех возникли проблемы, для решения которых она была необходима.

Мировая наука, в принципе, является прагматической, т.е. «соединением» математической методологии и прагматического познания. Отличие мировой науки от известной ранее прагматической науки прежде всего заключается в различной направленности этих наук, о чем мы уже неоднократно говорили выше.

Возникновение мировой науки изменило общий социальный статус науки в обществе. Греческая наука была просто частью греческой интеллектуальной культуры. Наукой занимались только состоятельные люди или ученые на службе у просвещенных правителей. Поэтому существовало незначительное число людей, которые знали или имели представление о науке. Позже в Европе к занятиям греческой наукой присоединились преподаватели университетов. И здесь только немного людей были знакомы или слышали о греческой науке.

Европейская наука при своем возникновении в XVII веке заявила свои претензии на общий мировоззренческий взгляд на природу и Вселенную. И здесь наукой занималась узкая прослойка состоятельных людей, преподавателей университетов и людей, состоявших на службе в академиях. Известные достижения науки в XVIII веке, который называли веком Просвещения, позволили снискать ей авторитет в определенных слоях образованного общества. Позже, во второй половине XIX столетия наука получает все расширяющееся применение в технике и в технологиях. Использование науки в развитии технического прогресса означает, что она становится производительной силой. В связи с этим расширяется контингент людей, занимающихся наукой, за счет части инженеров, работающих в частных компаниях. Более того, в армии и на государственной службе требовался уже достаточно высокий уровень образования.

Мировая наука превратила научную деятельность в отрасль экономики, ибо для разработок в области управления было выделено щедрое финансирование, как из государственных, так и частных и общественных источников. Так как мировая наука активно применяется в различных сферах управления социальными процессами, выступая основой квалифицированных экспертных оценок и принятия управленческих решений, то она имеет совсем другой социальный статус в обществе. Соединяясь с властью, она реально начинает воздействовать на выбор тех или иных путей социального развития. Эту новую функцию науки иногда характеризуют как превращение ее в социальную силу. При этом усиливаются мировоззренческие функции науки и ее роль в качестве непосредственной производительной силы.

Решение задач управления потребовало развития систем, позволяющих собирать и обрабатывать информацию. Сбор, обработка и хранение управляющей информации в современной ситуации невозможны без использования компьютеров. Компьютеры, которые на первоначальной стадии своего развития были созданы для проведения научных и технических расчетов, в течение короткого времени были переориентированы, прежде всего, для решения управленческих задач. Именно развитие компьютерной техники и позволило интеллектуальной революции достичь тех успехов, которые можно записать на ее счет.

Плодотворная концепция заключается в широком обобщении, ограниченном удачной конкретизацией.

А.Н. Уайтхед

9.3. Системная методология.

Как мы уже говорили выше, одной из основных причин мировой интеллектуальной революции являлся кризис европейской научной методологии, которая не смогла дать направления решения проблем управления. Поэтому одним из основных результатов этой революции должно быть построение новой научной методологии, которая должна принципиально отличаться от прежней методологии. Активное построение новой методологии началось уже во второй трети XX века в трудах многих ученых в разных странах. Несмотря на достигнутые до настоящего времени успехам, все же трудно утверждать, что новая научная методология построена.

На начальном этапе построения новой методологии можно выделить три направления.

Первое направление связано с решением конкретных задач управления. Оно своим возникновением в первую очередь обязано второй мировой войне. Возникшая в течение войны методология решения задач была тесно связано с существующей европейской научной методологией, которую приспособили к нуждам задач управления. Это направление получило название *«исследование операций»*. Строение и методы исследования операций мы будем обсуждать в следующей главе.

Второе направление, которое возникло в конце 40-х годов, основано на идеях *«кибернетики»*. Основы кибернетики заложил Н. Винер в 1948 г. в книге «Кибернетика, или Управление и связь в животном и машине». Достижением Винера является то, что он обратил внимание на общность принципов управленческой деятельности для принципиально различных объектов природы и общества. По его мнению, управление сводится к передаче, хранению и переработке информации, которая содержится в различных сигналах, сообщениях и сведениях. Основная заслуга Винера заключается в том, что он впервые понял принципиальное значение информации в процессах управления. Таким образом, кибернетика изучает системы любой природы, способные воспринимать, хранить и перерабатывать информацию и использовать ее для управления и регулирования.

Здесь важно отметить, что кибернетика впервые систематически стала выявлять те общие свойства, которыми обладают сами объекты разной природы и их системы управления. Так, например, было выявлено много общих свойств, которыми обладают биологические и экономические объекты. Выявление этих свойств оказало существенное влияние при построении систем управления сложными техническими системами.

Кибернетическая методология существенно отличается от методологии исследования операций, как объектами исследования, так и подходом к их изучению. Если исследование операций изучает определенные функции управления, то кибернетика уже рассматривает в определенном смысле управление объектом в целом. Отсюда и разница и в самом подходе: если исследование операций использует модели, описывающие ту или иную функцию, то кибернетика стремиться построить модели, которые функционируют подобно изучаемому объекту. Поэтому, если исследование операций использует только математический язык для моделирования, то кибернетика использует также и различные другие языки, в частности, компьютерные и технические языки. Если исследование операций использует математические модели, основанные на той или иной теории, то кибернетическое моделирование основывается на «принципе черного ящика».

И, наконец, третий подход – *системный подход* – по своей сути наиболее отвечающий сущности мировой интеллектуальной революции. Системный подход возник как некоторый методологический подход к познанию в середине 50-х годов XX в. на базе общей теории систем. Благодаря усилиям Л. фон Берталанфи, в 1954 г. было организовано Общество содействия развитию общей теории систем, которое в 1957 г. было переименовано в Общество исследований в области общей теории систем. Это общество опубликовало в 1956 г. первый выпуск ежегодника «Общие системы».

В статье, помещенной в этом сборнике, Берталанфи так определил причины возникновения общей теории систем. Во-первых, существует общая тенденция к достижению единства различных естественных и общественных наук. Во-вторых, такое единство может быть предметом изучения общей теории систем. В-третьих, эта теория может быть важным средством формирования строгих теорий в науках о живой природе и обществе.

Системный подход следует рассматривать как некоторый методологический подход человека к действительности, основанный на нескольких общих принципах, с помощью которых реальный объект описывается как совокупность взаимосвязанных компонент. Он состоит в том, что любой более или менее сложный объект рассматривается в качестве относительно самостоятельной системы со своими особенностями функционирования и развития.

Основываясь на идеях целостности и относительной независимости объектов, находящихся в целостном мире, принцип системности предполагает представление исследуемого объекта как некоторой системы, характеризующейся элементным составом, структурой как формой взаимосвязи элементов, функциями элементов и целого, единством внутренней и внешней среды системы, законами развития системы и ее составляющих. Таким образом, будучи принципом познания, выполняет ориентационную и мировоззренческие функции, обеспечивает не только видение мира, но и ориентацию в нем.

Развитие системного подхода интенсивно началось со второй половины XX в. Значительную роль в развитии этого подхода сыграл Л. фон Берталанфи, который создал общую теорию систем, в которой он попытался сформулировать общие принципы и законы поведения систем безотносительно к их специальному виду и природе составляющих их элементов. В центре его рассмотрений лежит понятие «система», под которым понимается совокупность взаимосвязанных элементов. Отсюда следует, что система обладает двумя свойствами: ограниченность и целостность.

Употребление термина «целостность» означает, что система в общем случае может обладать свойствами, которыми могут не обладать составляющие ее части. Но тогда рассмотрение исследуемого объекта как систему противоречит методологическому подходу философов от Аристотеля до Канта. Так, например, в греческой науке любой объект исследования или рассматривался цельным объектом, или объектом, состоящим из частей, причем в этом случае свойства целого определяется свойствами составляющих его частей.

Аналогичная ситуация сложилась в европейской науке: и здесь, в основном, предполагалось, что поведение исследуемого объекта полностью описывается поведением составляющих его частей. Яркой иллюстрацией такого подхода служат слова крупного физика XX века Р. Фейнмана:

«Право же, ни одна наука, ни одна отрасль знаний не движутся так бурно по всем направлениям вперед, как биология. Но если б мы могли назвать то самое главное, что ведет нас сейчас все вперед и вперед в наших попытках понять явление жизни, мы обязаны сказать: «все тела состоят из атомов», всё, что происходит в живых существах, может быть понято на языке движений и покачивания атомов». (Р. Фейнман и др.(1), стр.64).

Те системы, ряд свойств которых не индуцируются свойствами составляющих их частей, называть сложными системами. Те системы, свойства которых индуцируются свойствами своих частей, принято называть простыми системами. В качестве примеров сложных систем могут служить практически все экономические и социальные системы. Простыми системами являются значительная часть чисто технических систем.

Основное внимание мировая наука уделяет исследованию сложных систем. Этим она отличается от европейской науки, объекты изучения которой рассматриваются как простые системы.

Создание системного мировоззрения является одним из основных достижений мировой интеллектуальной революции, которое предопределили развитие научно-технического прогресса человечеств во второй половине XX в. На всех крупных достижениях человечества в это время можно найти влияние в той или иной степени системного подхода. На базе системного подхода было разработано несколько различных дисциплин, таких, как, например, системный анализ, системотехника.

9.4. Моделирование.

В процессе мировой интеллектуальной революции большое значение наряду с понятиями система и системный подход приобрели понятия модели и моделирования. С понятием модель мы впервые неявно встречаемся у Декарта. Сам термин «модель» ввел в обиход Лейбниц. Затем этот термин можно встретить в различных областях знаний в течение XIX в. Сегодня трудно встретить такую область знаний, более того, трудно найти такую научную книгу, в которой в том или ином смысле используется понятие модели.

Ниже нас будет интересовать лишь так называемое *математическое моделирование*. Но прежде напомним несколько основных определений. Моделирование представляет собой процесс исследования объекта с помощью модели или набора моделей. Под *моделью* объекта понимается описание этого объекта на некотором языке человеческого общения. Этот язык называется *языком моделирования*.

Понятие модели объекта является очень широким понятием. Познание любого объекта, как мы уже отмечали, *всегда* происходит с помощью модели. Если объект находится вне сознания человека, то для его изучения человек должен, прежде всего, построить модель этого объекта на одном из языков. Язык моделирования может быть языком ощущений или, например, любым языком человеческого общения. Знания, которые имеются относительно *исследуемого объекта*, ***всегда*** являются знаниями, связанными *с некоторой моделью*. *Вне модели нет знаний об исследуемом объекте*. Но для того чтобы знания, полученные с помощью модели, можно было принять за знания относительно исследуемого объекта, необходимо, чтобы были основания для такого решения. Обычно в этом случае говорят, что модель должна *соответствовать* изучаемому объекту.

Моделирование как процесс познания распадается на ряд этапов. *Первый этап* моделирования состоит в установлении цели моделирования. *Второй этап* заключается в выборе языка моделирования и построение модели. *Третьим этапом* является исследование модели и формулировка результатов исследования. На *четвертом этапе* принимается решение о том, насколько результаты исследования отвечают поставленным целям моделирования. В случае положительного ответа процесс моделирования заканчивается; в случае отрицательного ответа существует возможность вернуться к первому этапу и повторить с изменениями весь процесс моделирования.

Под математической моделью мы понимаем модель на математическом языке. Математическое моделирование есть процесс построения и использование математической модели или набора математических моделей с целью решения (исследования) определенной проблемы или задачи.

Так как любое познание основано на изучении исследуемого объекта или явления с помощью модели, то любое математическое исследование или решение задачи с помощью математики как математическое моделирование. Рассмотрим процессы решения некоторых типовых задач, с которыми сталкивается математика, с точки зрения моделирования. Целью этого рассмотрения является описать те методологические проблемы, с которыми сталкивается математика при решении рассматриваемых задач.

Начнем с рассмотрения типовых задач теоретической математики. Целью любого исследования в рамках теоретической математики является доказательство некоего утверждения относительно математического объекта или набора математических объектов. Формулировку требуемого утверждения можно рассматривать как модель исследуемого объекта. Очевидно, что эта модель сформулирована на математическом языке. (Хотя эта фраза похожа на тавтологию, но все же ее стоит сформулировать для дальнейшего). Сам процесс исследования модели заключается в нахождении математического доказательства сформулированного утверждения. Последний этап моделирования заключается в проверке доказательства с целью принятия решения о том, доказано или не доказано требуемое утверждение. Если в доказательстве имеются ошибки или пробелы, то возвращаются снова к третьему этапу моделирования. Возможна и ситуация, когда меняется формулировка утверждения, и тогда приходится возвращаться к первому этапу. Рассмотренная ситуация с точки зрения методологии является достаточно простой и ясной, хотя сам процесс исследования модели может растянуться на долгие годы.

Среди типичных задач теоретической математики встречаются и такие, когда требуется найти алгоритм для вычисления значений функций или численного решения уравнения. Основной моделью является или функция, значения которой мы вычисляем, или уравнение, решение которого ищется. В этом случае решение задачи состоит в нахождении алгоритма для численного решения задачи и в доказательстве того, что результат применения алгоритма приводит к решению задачи. Прежде всего, необходимо отметить, что все рассмотрения проводятся над математическими числами. Алгоритм представляет собой набор моделей, с помощью которых ищется решение задачи, и которые называются вторичными моделями. Эти модели отличны от основной модели, хотя тоже задаются на математическом языке. Вторичная модель, по своей сути является инструкцией для проведения вычислений. Результат этих вычислений выражается с помощью математических чисел.

Таким образом, мы здесь сталкиваемся с парой моделей: основной моделью и вторичной моделью, - которые рассматриваются одновременно. Основная модель служит для формулирования задачи, а вторичная – для получения численного результата. Нахождение алгоритма и математические доказательства утверждений, связанных с этим алгоритмом, составляет содержание *вычислительной математики.* В такой формулировке вычислительная математика является частью теоретической математики.

Естественно, возникает вопрос: как определить, что полученный числовой результат является решением сформулированной задачи. Здесь возможны две ситуации. *Первая ситуация* заключается в том, что ни один из численных результатов не является решением поставленной задачи, а решением задачи является только предел из чисел. В этом случае на четвертом этапе моделирования необходимо проверить доказательство последнего утверждения. *Вторая ситуация* заключается в том, что существует (или выбран) некий критерий, на основании которого можно утверждать, является или не является полученное численное решение решением поставленной ранее задачи. Выбор критерия, хотя и выражается на математическом языке, происходит вне рамок теоретической математики.

Эти две ситуации принципиально отличаются друг от друга. В первом случае вся деятельность протекает внутри теоретической математики; субъективный фактор оказывает влияние только на третьем этапе моделирования. Во втором случае, субъективный фактор оказывает принципиальное влияние не только на третьем этапе, но и на четвертом этапе.

Теперь рассмотрим основные этапы и проблемы процесса моделирования при решении такой типичной задачи, как вычисление конкретного численного значения математической функции при определенном значении аргумента. В этом случае цель процесса моделирования ясно выражена на языке теоретической модели, которая представляет символическую запись математической функции, числовое значение которой необходимо вычислить. Второй этап моделирования относится в этом случае к вычислительной математики. В этом случае необходимо найти алгоритм решения поставленной задачи. В общем случае, необходимо найти модель в рамках вычислительной математики, которая в общем случае отличается от теоретической модели.

Поясним сказанное на примере вычисления значения функции $\sin x$ при определенном значении $x = b$. Вычислительная математика в этом случае предлагает алгоритм, заключающийся в том, что заданная функция заменяется определенной частичной суммой бесконечного ряда, соответствующего sin x. Предложенную частичную сумму можно рассматривать как вычислительную модель. Другими словами, в этом случае вычислительная модель является просто математической формулой.

На вычислительную модель можно посмотреть двояким образом. С одной стороны, вычислительная модель есть объект теоретической математики, а с другой стороны, эта модель является символьной записью методики вычисления конкретного значения функции. Так как любое конкретное вычисление происходит с помощью прагматических чисел, то процесс вычисления происходит уже в рамках прагматической математики. Но тогда вычислительная модель «превращается» в прагматическую модель. Иначе говоря, имеется некоторое символьное выражение (или набор символьных выражений), которое можно рассматривать двояким образом: один раз - в рамках теоретической математики, а другой раз – в рамках прагматической математики.

Такое двойственное рассмотрение одной и той же модели сразу выявляет принципиальное противоречие. Это противоречие заключается в том, что при рассмотрении модели как теоретической модели можно проводить и осуществить процесс вычисления над математическими числами, но нельзя осуществить формально процесс вычисления над прагматическими числами в рамках прагматической математики, ибо результат деления прагматического числа на прагматическое число не всегда является прагматическим числом.

Поясним сказанное на примере вычисления значения функции sin x. Значение этой функции при x = b является в общем случае математическим числом, но не прагматическим числом, т.е. число sin b нельзя записать с помощью конечного числа цифр.

В прагматической математике это противоречие решают с помощью так называемых «приближенных значений». Это означает, что по определенным правилам объявляют некоторое прагматическое число результатом деления двух прагматических чисел. Другими словами, результат деления двух прагматических чисел является соглашением, которое может касаться только определенной группы людей. Это соглашение носит временный характер, ибо оно может зависеть от условий задачи, от других требований, связанных с возможностью осуществления условий задачи, от квалификации вычислителей и т.п. Отсюда следует, что вычислительная задача практически всегда имеет много различных решений. В связи с этим остро встает проблема выбора некоторого конкретного решения. Для осуществления выбора необходимо, чтобы существовал критерий (критерии), с помощью которого (которых) и осуществляется выбор. Процесс построения критерия является субъективным, т.е. неформализованным процессом.

Схематически рассмотрев процесс конкретного вычисления значения функции, можно сделать несколько методологических выводов. *Во-первых*, в процессе решения этой задачи одновременно используется несколько моделей различной природы. *Во-вторых*, вычислительные задачи обычно имеют множество различных решений. *В-третьих*, для выбора решения задачи необходим определенный критерий, на основании которого происходит выбор. Этот критерий строится неформальным путем. *В-четвертых*, выбранное с помощью критерия решение не является чисто формальным решением.

Остальные типы вычислительных математических задач используют одновременно также наборы разнородных моделей. В решении этих задач существенную роль играет субъективный фактор.

Рассмотрение с позиций математического моделирования позволяет по-новому взглянуть на исследования в рамках разных типов математики, а также поставить ряд новых принципиальных вопросов, на которые ранее математики не давали четких ответов (которые, возможно, и не существуют). В качестве примера такого вопроса приведем следующий: что такое точность вычисления или погрешность вычисления?

Мы ограничимся приведением одного примера таких вопросов, ибо более подробное рассмотрение выходит за пределы этой книги.

…Нужно использовать все вспомогательные средства интеллекта, воображения, чувств и памяти как для отчетливой интуиции простых положений и для верного сравнения искомого с известным, чтобы таким путем открыть его, так и еще и для того, чтобы находить те положения, которые должны быть сравнимы между собой; словом, не нужно пренебрегать ни одним из средств, находящихся в распоряжении человека.

Р. Декарт, Правила для руководства ума. Правило XII.

Глава 10. Развитие математики в настоящее время.

Подлинный прогресс в любой науке наступал тогда, когда в ходе изучения задач, которые были скромными по сравнению с окончательными целями, развивались методы, которые можно было обобщать все дальше и дальше. Свободное падение является весьма простым физическим явлением; однако именно изучение этого чрезвычайно простого факта и сравнения его с накопленными в астрономии материалом вызвало к жизни механику.

Дж.фон Нейман, О. Моргенштерн

10.1. Мировая математика.

Во второй трети XX века в результате интеллектуальной революции появилась новая математическая наука, которую мы условно назвали *мировой математикой*. Мировая математика возникла как ответ на потребности развития человеческого общества в развитых странах в построении надежной основы для выработки решений. Необходимость этих решений возникла в процессе управления в экономической, социальной и технологических областях человеческой деятельности.

Появление мировой математики не означает исчезновение ранее существовавших математик. Более того, появление и развитие новой математики оказало плодотворное влияние и на развитие европейской теоретической математики, открыв ей новые области и объекты для математических исследований.

Мировая математика принципиально отличается от европейской математики. *Во-первых*, европейская математика появилась на свет как *язык естествознания*, в то время как мировая математика появилась на свет как *язык управления* системами. Если основной задачей европейской математики было описание явлений природы, то основной задачей мировой математики является участие в подготовке управленческих решений.

Во-вторых, мировая математика и европейская математика имеют различное строение. Европейская математика состоит из двух типов математик: теоретической математики и прагматической математики. Мировая математика состоит из следующих математик: мировая прагматическая математика, мировая теоретическая математика и компьютерная математика. Мировая прагматическая математика используется для решения практических задач, связанных с управлением. Мировая прагматическая математика, по существу, поглотила европейскую прагматическую математику. Мировая теоретическая математика является дискретной математикой, основной характерной особенностью которой является использование дедуктивного доказательства. Большинство теорий из мировой теоретической математики имеет непрерывный аналог, который можно рассматривать как часть европейской теоретической математики. Компьютерная математика – это, во-первых, собрание методов решения прикладных математических задач с помощью компьютеров, а во-вторых, различные математические теории, связанные с построением, развитием самих компьютеров и методов программирования.

В-третьих, если европейская теоретическая математика, в основном, являлась непрерывной математикой, то мировая математика является *дискретной математикой*. Дискретность мировой математики определяется тем, что она работает *только* с прагматическими и компьютерными числами.

В-четвертых, мировая математика и европейская математика отличаются друг от друга и целями исследования. Европейская математика предназначена для описания явлений физического мира, т.е. установления законов, заданных в виде математических зависимостей. Одним из основных предположений, лежащих в основе физики, является постоянство (в определенном смысле) протекания физических явлений, которые теоретически можно всегда с помощью определенных законов. Поэтому теоретическая физика практически до конца XIX века была детерминистской физикой. Отсюда и европейская математика была, в основном, детерминистской наукой, описывающей процессы в условиях определенности. Теория вероятностей, первая математическая попытка уйти от детерминизма, свое первое практическое и теоретическое применение нашла вне естествознания. Принципиально отличная ситуация связана с мировой математикой, которая признана обосновывать процессы принятия решений в условиях неопределенности (незнания). Любое обоснование принимаемых решений связано с прогнозированием в условиях неопределенности.

Процесс возникновения мировой математики состоял из несколько этапов.

Первый этап — это возникновение и развитие ***исследований операций***. Сам термин возник во время Второй мировой войны, хотя некоторые идеи, лежащие в основе этой дисциплины, можно увидеть в исследованиях, опубликованных ранее. Если же посмотреть на эту дисциплину с современной позиции, то ее более точно можно назвать «анализ управляющих решений». Именно задача принятия решений (или выбора способов действий) является главной для всех операционных исследований.

Исследование операций стало широко применяться на практике, прежде всего, в военном деле во время Второй мировой войны. Первые крупные практические результаты были достигнуты в Англии в областях, связанных с действиями авиации. Специалисты в области исследования операций смоли резко повысить уровень обнаружения самолетов, улучшить эффективность бомбометания, составить эффективные расписание патрулирования самолетов и т.п. Один из ведущих специалистов в области исследования операций в начальный период физик П. Блеккет, который позже получил Нобелевскую премию за работы в области космических лучей, так охарактеризовал эту область в своей записке «О некоторых аспектах методологии исследования операций», подготовленной в 1941 году:

«Очевидной особенностью исследования операций в том виде, в котором оно проводится в настоящее время, является то, что оно должно иметь строго практический характер. Его цель содействовать нахождению способов повышения эффективности боевых операций, выполняемых в данный момент или планируемых на будущее. Чтобы добиться этого, изучаются предшествующие операции, затем разрабатываются теории, объясняющие наблюдаемые факты, и в конце концов и факты, и теории используются для прогноза относительно предстоящих операций…

Прогнозирование будущих событий, конечно, всегда сопряжено со значительной неопределенностью, но опыт показал, что вопреки широко распространенному мнению количественные прогнозы можно сделать достаточно. Это в значительной степени обусловлено тем обстоятельством, что многие факторы, характеризующие операцию, в течение достаточно продолжительного периода времени остаются почти неизменными. Такая стабильность кажется довольно неожиданной, если иметь в виду множество случайных событий и тех индивидуальных особенностей и способностей людей, которые обычно проявляются даже в ходе небольших операций. Однако все эти различия для большого числа операций сглаживаются, и часто оказывается, что обобщенные результаты сравнительно устойчивы».

Первые специалисты по исследованию операций имели ясное представление о том, что новизна их деятельности обусловлена двумя факторами: свойствами функциональных систем, рассматриваемых в качестве объектов научных исследований, и административными структурами, формируемыми с целью своевременной практической реализации решений, принимаемых на основе этих исследований. Такое понимание сущности исследования операций остается верным и в наши дни.

По окончанию войны группы специалистов продолжали свою работу в вооруженных силах Великобритании, США, Канады. Публикация ряда результатов в открытой печати вызвали всплеск общественного интереса к этому направлению, что привело в дальнейшем к широкому применению методов исследования операций для решения различных экономических и управленческих задач как в частном, так и в общественном секторах народного хозяйства.

Исследование операций принципиально отличается от традиционных научных дисциплин своим новым подходом к процессу решения стоящих перед ним проблем. Эта новизна заключается в специальных методах проведения наблюдений, в специфических типах математических моделей, в использовании этих моделей для получения прогноза, в проверке прогноза на основе новых наблюдений.

Для удобства можно с достаточной степенью точности определить исследование операций как научный подход к решению задач организационного управления. При решении любой конкретной задачи применение методов исследования операций предполагает:

1) построение математических, экономических или статистических моделей для задач принятия решений и управления в сложных ситуациях или в условиях неопределенности;

2) изучение взаимосвязей, определяющих возможные последствия принимаемых решений, а также установление критериев эффективности, позволяющих оценивать относительное преимущество того или иного варианта действий.

Анализ управляющих решений предполагает расчленение той или иной сложной проблемы на подпроблемы, легче поддающиеся логическому и интуитивному рассмотрению. Результаты тщательного исследования каждой из подпроблем надлежащим образом синтезируются, что позволяет глубже осмыслить исходную проблему в целом. Однако методы исследования операций обладают рядом специфических черт. Чтобы тот или иной подход к решению какой-либо конкретной задачи можно было квалифицировать как операционный, он должен содержать, в частности, следующие элементы:

1. *Ориентация на принятие решения.* Основные результаты анализа должны иметь непосредственное и полностью определенное отношение к выбору способа действий (т. е. стратегии или тактики).

2. *Оценка на основе критериев экономической эффективности.* Сравнение различных возможных вариантов действий должно основываться на количественных оценках, позволяющих однозначно определить полезность ожидаемого исхода для рассматриваемой организации. Количественные оценки для коммерческих фирм обычно предполагают использование таких измеримых величин, как расходы, доходы, наличные денежные средства, норма прибыли от дополнительных капиталовложений и пр. Надлежащую количественную оценку должны получить колебания рыночного спроса. В рекомендуемом решении должен быть достигнут оптимальный «баланс» с учетом всех этих нередко противоречивых факторов.

3. *Доверие к математической модели.* Процедуры обращения с упомянутыми выше параметрами должны быть определены настолько точно, чтобы любой специалист в области системного анализа смог их трактовать совершенно однозначно. Другими словами, опираясь на одни и те же данные, различные специалисты-аналитики должны

получать одинаковые результаты.

Построение моделей является квинтэссенцией операционного подхода к решению организационных задач. В исследовании операций моделирование играет роль, аналогичную лабораторному эксперименту в естественных науках. Построение модели помогает привести сложные и подчас неопределенные факторы, связанные с проблемой принятия решения, в логически стройную схему, доступную для детального анализа. Такая модель позволяет выявить альтернативы решения задачи и оценить результаты, к которым они приводят, а также дает возможность определить, какие данные необходимы для оценки имеющихся альтернатив. В итоге это обеспечивает получение обоснованных выводов. Короче говоря, модель является средством формирования четкого представления о действительности.

Слово «модель» имеет несколько смысловых оттенков, каждый из которых оказывается существенным для исследования операций. Прежде всего «модель» может быть физической копией реального объекта. Примером таких моделей являются, скажем, уменьшенные модели самолетов и локомотивов. «Модель» может также означать идеализацию действительности, в которой часто отсутствуют некоторые детали. В качестве примера можно привести модель плана реконструкции городов. Наконец, применяется глагол «моделировать», означающий «определять результаты идеализированного представления».

В исследовании операций модель, как правило, относится к классу математических моделей и обязательно является некоторым приближенным отображением действительности. Она должна строиться таким образом, чтобы отражать сущность проблемы организационного управления. В то же время модель "должна быть достаточно свободной от несущественных деталей, что позволяет отыскивать более эффективное решение, которое можно реализовать на практике. Определение правильного баланса между степенью адекватности модели той действительности, которую она описывает, и возможностью получения из модели реализуемого решения в большинстве случаев представляет собой сложную задачу, и поэтому построение моделей может оказаться делом далеко не легким.

В построении операционных моделей можно обнаружить три широко распространенных и взаимосвязанных направления. В *первом* из них основное внимание сосредоточено на оптимизации. Первый шаг на пути совершенствования организационного управления заключается в поиске решений, оптимальных в смысле одного или нескольких заданных критериев. Определение оптимума, как правило, производится при наличии некоторых условий. Другими словами, значения управляемых переменных, фигурирующих в выражении для заданной целевой функции, обычно подчиняются ограничениям, вытекающим из «технических условий» задачи. Нередко модель содержит ограничения, отражающие динамические характеристики рассматриваемой задачи.

Второе направление связано с определением аналитических свойств математической модели, включая чувствительность оптимального решения к изменению значений параметров модели, структуру оптимального решения и его характеристики. В качестве при мера можно привести модель, определяющую стратегию пополнения запасов. При рассмотрении такой модели обычно стремятся установить характер зависимости стратегии от прогноза спроса, точно определить правило, выражающее эту стратегию (например: при уменьшении запаса до определенного уровня заказать новую партию), а также стационарную частоту возникновения дефицитов и средний уровень запасов.

Третье направление анализа связано с определением в явном виде взаимосвязей, характеризующих систему, в которой должна использоваться модель. Результаты операционного анализа должны быть увязаны с информационной, командно-распорядительной и регулирующей подсистемами организации. Эти результаты нельзя практически использовать независимо от условий существующей организационно-управленческой среды. Поэтому любой операционный проект следует рассматривать, по крайней мере частично, как итог системного исследования.

Основное внимание уделяется математическому описанию функционирования сложной системы, а также сбору и накоплению необходимых данных. Модель по самой своей природе носит приближенный характер. С одной стороны, чтобы отразить все существенные стороны проблемы, модель необходимо в достаточной степени детализировать. С другой стороны, модель должна быть не настолько сложной, чтобы нахождение соответствующего решения оказалось слишком затруднительным. Компромисс между этими двумя требованиями достигается методом проб и ошибок. При этом в значительной степени учитываются результаты предварительного изучения системы, а также проводится глубокий и всесторонний анализ предлагаемой операционной модели на чувствительность.

Применение различного типа математических моделей привело к созданию принципиально новых математических дисциплин. В качестве примеров новых математических дисциплин можно привести теорию линейного программирования, теорию массового обслуживания, теорию кодирования, теория игр и т.д. В последующих главах мы более подробно поговорим об этих новых дисциплинах.

Второй этап развития мировой математики связан с возникновением и развитием ***кибернетики***, а также ее различных приложений, таких как техническая кибернетика, экономическая кибернетика и т.п. Официальное рождение кибернетики обычно связывают с выходом в свет в 1948 г. книги Н. Винера «Кибернетика, или управление и связь в животном и машине», которая потрясла многих неожиданностью своих выводов. Однако уже в 1936 г. Винер собрал в Принстоне семинар, в котором приняли участие ученые разных специальностей: от нейрофизиологов, математиков и до инженеров-связистов, — которые на этом семинаре заговорили на одном научном языке, хотя словарь языка содержал термины из разных наук.

На этом семинаре был принят ряд обобщающих терминов: слово «память» объединило различные методы хранения информации, термин «обратная связь» перешел из электротехники и автоматики в науку о живых организмах, принято измерение количества информации в битах. В последствии Винер сказал: «Я считаю, что встреча в Принстоне дала жизнь новой науке кибернетике».

Общепринятого определения кибернетики нет, ибо с течением времени содержание этого понятия изменяется, наполняясь новым содержанием. Но мы можем определить круг задач, решением которых занимается кибернетика. Кибернетика как наука занимается изучением систем произвольной природы, способных воспринимать, хранить и обрабатывать информацию, используя ее для управления и регулирования происходящих процессов.

Кибернетика открыла сходство и общность принципов между системами различной природы, что привело к важным теоретическим и практическим последствиям. Теоретическое значение этого открытия состоит в том, что, что она показала существование ряда принципов, присущих объектам как живой, так и неживой природы. Среди этих принципов можно отметить, в частности, следующие: наличие управления, саморегулирование на основе обратной связи, иерархичность строения и системы управления системы, существование определенного изоморфизма между системами различной природы, целостность системы и выделение в ней подсистем. В основе управления системы лежит процесс сбора, обработки и хранения информации.

Кибернетика и исследование операций появились практически одновременно. Во время войны создатели исследования операций и кибернетики решали подобные задачи. После войны их пути разошлись, благодаря объектам исследования и целям исследования. Если исследование операций сосредоточила свое внимание на способах решения определенных практических задач, связанных с управлением, то кибернетика изучает те общие свойства, которыми обладают объекты различной природы, в частности, технические, биологические и экономические системы. Чтобы подчеркнуть сказанное, трудно представить (или найти) в области исследования операций книгу, подобную книге Винера «Кибернетика и общество». Однако необходимо отметить, что можно найти такие области и задачи, которые относятся одновременно к обоим направлениям

Кибернетика на начальном этапе своего развития также отличалась от исследования операций тем, что она делала упор больше на методологические проблемы, нежели на разработку методик решения конкретных прикладных задач. В качестве примера можно привести вклад кибернетики в методологию моделирования, заключающийся в введение в рассмотрение так называемого принципа «черного ящика». Трудно говорить о широком практическом применении этого принципа в практике вне рамок технических систем, однако этот принцип широко применялся в методологическом плане при моделировании сложных систем.

В кибернетике можно выделить три основных направления:

общая, или *теоретическая*, кибернетика, которая имеет дело с общими математическими моделями управления и представляет собой математическую дисциплину;

техническая кибернетика, областью которой является техническая реализация различных сложных проектов — робототехника, разработка технических комплексов, систем управления техническими объектами;

прикладная кибернетика, объединяющая различные прикладные направления кибернетики: военная , экономическая, биологическая, медицинская и т.п.

Можно указать несколько новых области математики, которых возникли и интенсивно развивались из-за кибернетики. *Во-первых*, область, связанная с различными теоретическими проблемами, относящимся к выработке, передаче и хранению информации. Здесь возникло ряд новых математических дисциплин, из которых упомянем теорию информации, теорию кодов и кодирования сообщений, теорию передачи информации и т.п.

Во-вторых, в силу того, что кибернетика с момента своего возникновения была тесно связана с биологией, то появилась необходимость в разработке специализированного математического языка для математический моделей, которые бы использовались для исследования процессов, характерных для живых систем. Так появилась новая область исследований, известная как теория искусственного интеллекта (в русской версии) или «Artificial Intelligence» (в английской версии). Английский термин впервые появился в 1956 г. на семинаре в Дортмундском колледже под тем же именем. Первыми работами в этом направлении, которые внесли существенный вклад, считаются работы Ф. Розенблата и У. Мак-Каллока, создавших в 1956-1965 гг. первые работы а области нейронных сетей и их приложений. Другие работы в области искусственного интеллекта связаны с разработкой различных программ для игры в шахматы и другие игры.

В третьих, благодаря попыткам применения математического моделирования в психологии, возникло в середине пятидесятых годов XX в. еще одно направление, которое получило название «распознавание образов», нашедшее широкое применение в дальнейшем в различных областях. Некоторые задачи теории распознавания образов появились еще раньше в связи с передачей и получением сообщений. Затем появились задачи, связанные с построением автоматов, которые должны были различать различные предметы, например, монеты, жетоны, банкноты и т.п.

Третий этап развития мировой математики связан с возникновением и развитием так называемого ***системного подхода***, который носит, прежде всего, методологический характер и который можно рассматривать как принцип познания. Этот подход состоит в том, что любой более или менее сложный объект рассматривается в качестве относительно самостоятельной системы со своими особенностями функционирования и развития. В литературе нередко употребляются несколько терминов: системный подход, принцип системности, системный метод, которые чаще всего употребляются как синонимы.

Системный подход сформировался в середине 50-х г. из двух источников: системного анализа и общей теории систем. Системный анализ родился в недрах компании RAND в конце 40-х г. как способ военного планирования, в частности, для планирования военного бюджета. Общая теория систем получила общественную известность в середине 50-х г., благодаря работам Л. Берталанфи.

Сегодня термин «системный подход» содержательно отражает группу методов, которые позволяют исследовать организацию и функционирование реального объекта, который представлен как система, т.е. как совокупность взаимодействующих компонентов (элементов). Эти методы развивались в рамках отдельных научных дисциплин и общенаучных концепций, являясь результатом междисциплинарного синтеза.

Системный подход, являющийся одним из важнейших достижений мировой интеллектуальной революции, относится к числу тех немногочисленных, но удивительно плодотворных интеллектуальных изобретений человечества, без применения которого невозможна успешная современная профессиональная деятельность практически в любой области. Сегодня трудно найти такую область интеллектуальной и профессиональной деятельности, в которой не используется системный подход. Более того, понятия «система» и всевозможные словообразования, связанные с этим термином, являются сегодня наиболее употребляемые слова в различных отраслях знаний, но и в практике, связанной с управлением и экономикой.

Таким образом, главное достижение системного подхода заключается в создании системного мировоззрения, системного метода получения знаний, основанного на ряде новых дисциплин. Если исследование операций можно рассматривать как формализацию практических методов решения практических задач, кибернетику — как методологию поиска общий свойств объектов различной природы, то системный подход направлен на решение общих задач, связанных с управлением сложных систем.

Системный метод получения знаний выделяет две составляющие: теоретическую и прикладную. В основе теоретической составляющей лежит общая теория систем, а в основе прикладной составляющей — системный анализ, который непосредственно связан с теорией и практикой принятия управленческих решений на различных уровнях иерархической системы управления.

Общая теория систем мыслилась ее основателем Л. Берталанфи как фундаментальная наука, исследующая проблемы систем различной природы. Однако если обратить внимание на содержание общей теории систем, то в нее входят в основном формализованные науки, которые хорошо применимы к простым системам.

Для исследования в области сложных систем потребовало совершенно нового подхода основанного на новой методологии. Таким подходом послужил системный анализ. Термин «system analysis» появился в конце 50-х г., хотя работы в этом направлении велись с конца 40-х г. Если пытаться охарактеризовать современный системный анализ очень укрупнено, то можно сказать, что он включает такие виды деятельности, как: научное исследование (теоретическое и экспериментальное) вопросов, связанных с проблемой; проектирование новых систем и изменений в существующих системах; внедрение в практику результатов, полученных в ходе анализа.

Первой методикой системного анализа, в которой были определены порядок, методы формирования и оценки приоритетов элементов структур целей, была система

«PATTERN» (Planning Assistance Through Technical Evaluation from Relevance Number»). Эта методика была разработана и применена в недрах компании «RAND». Назначением, конечной целью созданием этой системы была подготовка и реализация планов обеспечения военного превосходства США над всем миром. Перед разработчиками была поставлена задача — связать воедино военные и научные планы США. Практика использования системы «PATTERN» продемонстрировала возможность проводить анализ сложных проблемных ситуаций, распределять по важности огромное количество данных в любой области деятельности, исследовать взаимное соотношение постоянных и переменных факторов, на которых основываются и на которые влияют принимаемые ими решения.

Системный подход стремиться широко использовать математический язык, ибо этот язык свободен от семантического содержания и выражает только структурные связи. Например, теория информации оказалась подходящим языком для описания таких в корне различных явлений, как структура языков, музыка, экономические отношения, умственная деятельность. Это возможно только потому, что столь разные явления могут быть описаны одной и той же математической моделью.

Как и исследование операций и кибернетика, так и развитие системного подхода привело появлению новых математических дисциплин. Среди этих дисциплин отметим следующие: математическая теория принятия решений, теория экспертных оценок, имитационное динамическое моделирование, эвристическая математика и т.п.

Рассмотренные три этапа возникновения мировой математики привели к появлению и развитию различных математических дисциплин, отличающихся друг от друга не только объектами исследования, методами исследования, но и степенью формализации процесса получения результатов исследований. Уже к концу 70-х г. одни и те же математические дисциплины стали использоваться как в исследовании операций, в кибернетике и в системном анализе. Ниже, в последующих параграфах этой главы мы дадим краткую характеристику отдельных математических дисциплин, входящих в мировую математику, о которых мы говорили выше.

Мировая математика, как уже неоднократно подчеркивалось, возникла для решения практических задач, связанных с процессом принятия решений. Одной из ха-рактерных особенностей этих задач является то, что для их конкретного решения требуется выполнение большого количества вычислений в ограниченное время. Другими словами, эти задачи невозможно решить без использования вычислительных машин. Только благодаря тому, что развитие мировой математики шло параллельно развитию вычислительной техники, удалось решать задачи. Более того, развитие вычислительной техники стимулировало развитие и математики.

На развитие вычислительной техники большое влияние в теоретическом плане оказало развитие таких отраслей математики как теория алгоритмов, теория автоматов, теория рекурсивных функций, теория машин Тьюринга, рождение которых приходится на 30-е г. XX в.

С появлением вычислительной техники, а затем компьютеров, родилась и ***компьютерная математика***, которая активно участвовала во всех достижениях человеческой цивилизации в XX в. Более подробно основные положения компьютерной математика будут рассмотрены в главе 11. Здесь же отметим только два принципиальных момента.

Во-первых, в силу технического устройства любого компьютера, он оперирует только числами, в цифровое представление которых входит только ограниченное сверху количество цифр. Верхняя граница определяется техническим устройством компьютера.

Во-вторых, компьютерная математика *предназначена* для вычислений, т.е. она не содержит дедуктивных теорий.

Чистейший трюизм, истинность которого становится очевидным при самом поверхностном взглядом, состоит в том, что математика изобретена человеком.

П.У. Бриджмен

10.2. Теоретическая математика в настоящее время.

Во второй трети XX века в результате интеллектуальной революции появилась новая математическая наука, которую мы условно назвали *мировой математикой*. Эта математика возникла как ответ на потребности развития человеческого общества в развитых странах в построении надежной основы для принятия решений, которые необходимо принимать в процессе управления в экономической, социальной и технологических областях человеческой деятельности. Как мы уже отмечали выше, в мировой математике появилась как составная часть теоретическая мировая математика. Поэтому наше рассмотрение распадается на три составляющие части. Во-первых, описание развития европейской теоретической математики (математический анализ в расширенном смысле) , которая продолжала раздвигать свои границы не только в традиционных математических дисциплинах, но и впитывая новые постановки задач, пришедшие из мировой математики. Во-вторых, рассмотрение основных направлений развития математической логики. И, наконец, в-третьих, описание развития мировой теоретической математики.

Описание развития европейской теоретической математики мы начнем с краткой характеристикой ситуации в ней в конце первой трети XX в.

«История математики знает не только величайшие взлеты, но и глубокие падения. Потеря истины, бесспорно, может считаться подлинной трагедией, ибо истины – драгоценнейшее из достояний человечества, и утрата даже одной из них – более чем основательная причина для огорчения. Основание того, что сверкающая великолепием витрина человеческого разума далеко не совершенна по своей структуре, страдает множеством недостатков и подвержена чудовищным противоречиям, могущим вскрыться в любой момент, нанесло еще один удар по статусу математики. Но бедствия, обрушившиеся на математику, были вызваны и другими причинами. Тяжелые предчувствия и разногласия между математиками были обусловлены самим ходом развития математики за последние сто лет. Большинство математиков как бы отгородились от внешнего мира, сосредоточив усилия на проблемах, возникших внутри самой математики, - по существу, они порвали с естествознанием. Это изменение в развитии математики нередко описывают как обращение к чистой математике, противопоставленной к прикладной математике» (М. Клайн, 33, с.324).

То же мнение высказывал Н. Бурбаки в своей статье «Архитектура математики»:

«Многие из математиков устраиваются в каком-нибудь закоулке математической науки, откуда они и не стремятся выйти, и не только почти полностью игнорируют все то, что не касается предмета их исследований, но не в силах понять язык и терминологию своих собратьев, специальность которых далека от них. Нет такого математика, даже среди обладающих самой большой эрудицией, который бы чувствовал себя чужеземцем в некоторых областях математического мира; что же касается тех, кто, подобно Пуанкаре и Гильберту, оставляет печать своего гения почти во всех областях, то они составляют даже среди наиболее великих редчайшее исключение».

На развитие европейской теоретической математики в XX веке большое влияние оказало резкое расширение народного образования на всех его уровнях: от начального образования и до высшего. Это расширение затронуло также и различное профессиональное образование на среднем и высшем уровне. Резко возросла потребность и в подготовке преподавательских кадров, в частности, математиков. Эта потребность стимулировала появление значительного числа математиков, занимающихся теоретической математикой.

Европейскую математику стали преподавать во всех высших школах, которые готовили инженеров и экономистов, причем часто уровень преподавания математики был не ниже уровня преподавания математики для математиков. Более того, уровень подготовки и объем знаний у инженеров и экономистов, выпускников ряда высших школ, в области прикладной математики был выше, нежели у выпускников математических школ университетов. Именно, инженеры, обладающие соответствующей математической подготовкой, стали первопроходцами ряда новых дисциплин прикладной теоретической математики. В качестве примера можно привести одного из основателей теории информации К. Шеннона.

Если в конце XIX века во всем мире можно было найти только от нескольких сотен до тысячи работающих математиков, то во второй трети XX века их уже насчитывалось несколько сотен тысяч человек. Такой приток специалистов вызвал не только бурное развитие старых областей теоретической математики, но и создание значительного числа новых самых разнообразных областей математических исследований. Резкое увеличение количества различных высших учебных заведений, где изучалась европейская математика, привел в европейскую математику тысячи преподавателей этих учреждений, которым необходимо было найти темы для исследований.

Так как оценка качества работы преподавателей в учебных заведениях существенно зависела от количества их математических публикаций, то количество различных математических публикаций с течением времени возрастало со скоростью возрастания экспоненты. Потребность в публикациях результатов математических исследований вызвала существенное увеличение количества как математических журналов, так и количества конференций и симпозиумов, на которых обсуждались эти результаты.

Увеличение количества работающих математиков и лавина математических публикаций привели к тому, что у работающего математика уже не было никакой физической возможности не только прочесть и понять все написанное, но просто ознакомиться с названиями всех новых статей. В связи с тем, что для карьеры необходимо было регулярно публиковать статьи, то математики выбирали такие области исследований, которые, согласно их способностям, позволяли достаточно быстро получать результаты. Естественно, что такими областями часто становились разделы чистой математики, где чистое мышление неограниченно никакими рамками, где можно с большой легкостью ввести новые математические объекты и поставить свои собственные задачи, изучение которых существенно позволяло расширить круг тем для исследований. На такое предпочтение математиков заниматься чистой математикой указывал известный математик XX века М. Стоун в своей статье «Революция в математике», написанной в середине XX века:

«Современный математик предпочитает определять предмет своей науки как изучение общих абстрактных схем, каждая из которых представляет собой здание, построенное из вполне определенных абстрактных элементов, скрепленных произвольными, но однозначно определенными соотношениями… По мнению математика, ни сами системы, ни представляемые логикой средства для изучения их структурных свойств не имеют прямой или необходимой связи с физическим миром… Лишь в той степени, в какой математика освободилась от уз, связывающих ее в прошлом с теми или иными конкретными аспектами реальности, она может стать гибким и мощным инструментом, столь необходимым для вторжения в области, лежащие за пределом известного. Уже сейчас можно привести многочисленные примеры, подтверждающие сказанное…»

Ему вторит известный специалист по математической физике Дж. Л. Синдж, который писал в середине XX в.:

«Большинство математиков имеют дело с идеями, которые, по всеобщем мнению, принято относить к математике. Математики образуют замкнутую гильдию. Всякий вступающий в нее дает обет оставить все мирское и обычно сдерживает свою клятву. Лишь немногие математики странствуют «на чужбине» в поисках математического пропитания в проблемах, заимствованных непосредственно из других областей науки. В 1744 или в 1844 г. такими странниками было подавляющее большинство математиков. В 1944 г. они составляют столь небольшую часть математиков, что большинству необходимо напоминать о существовании меньшинства и объяснять точку зрения тех, кто его составляет.

Представители меньшинства не желают, чтобы их называли «физиками» или «инженерами», ибо они следуют математической традиции, существующей более двадцати веков и связанной с именами Евклида, Архимеда, Ньютона, Лагранжа, Гамильтона, Гаусса, Пуанкаре. Меньшинство отнюдь не желает умалять работу большинства, но опасается, что если математика будет питаться только собственными соками, то со временем движущие ею стимулы исчерпают себя…

Здание современной науки гудит от кипучей деятельности, какой наука не знала в прежние времена. Нет никаких видимых признаков упадка. И только самые наблюдательные смогли заметить, что часовой покинул свой пост. Он не отправился на покой – работает, как всегда, не покладая рук, но работает только на себя».

Увлечение изучением различных новых абстрактных схем приводило к более узкой специализации математиков, причем скорость увеличения специализации у математиков-теоретиков с течением времени резко усилилась: сегодня трудно найти такие математические задачи, которыми одновременно бы занималась группа, состоящая из более десяти математиков. Более того, «во всем мире трудно найти дюжину людей», понимающих то, чем занимается данный конкретный математик. В результате современную теоретическую математику можно образно сравнить с вечно строящимся зданием. К этому зданию постоянно пристраиваются помещения, в которых размещаются небольшое число математиков, которые с достаточным трудом и приложенными усилиями могут понять друг друга.

Как мы уже неоднократно упоминали, развитие европейской теоретической математики в этот период характеризовалось возникновением и преодолением кризисов, затрагивающих различные стороны ее оснований. Методология математики, заложенная греками и служившая верой и правдой в течение двух с половиной тысячелетий, вдруг оказалась построенной на фундаменте с большим количеством трещин. Все попытки подвести более цельный фундамент под здание математики оказались до сих пор неудачными. Представление о математике как о цельной науке, которое еще бытовало в конце XIX века, к середине XX века было разрушено. Сегодня она распалась на несколько математик, несовместимых друг с другом, ибо в основании каждой из них лежат несовместимые между собой утверждения. Этому свидетельствуют результаты П. Коэна, который показал в 1963 г., в частности, что могут существовать одновременно две математики, одна из которых содержит в качестве аксиомы гипотезу континуума, а другая – отрицание этой гипотезы. Аналогичное утверждение имеет место для аксиомы выбора, которая широко используется в качестве одного из элементов доказательства в принципиальных утверждениях математического анализа.

В теоретической математике, как мы уже говорили выше, можно сегодня четко выделить два основных направления, которые относительно слабо связаны друг с другом: чистая математика и прикладная математика. Если основной задачей чистой математики является доказательство математических утверждений, описывающих связи между классификациями математических объектов различного сорта, то основной задачей прикладной теоретической математики является исследование математических моделей, описывающих естественные явления, включая доказательство существования (а иногда и способа нахождения) конкретных численных (в области *математических чисел*) решений у различных прикладных математических задач. Суть отличия между математиком-теоретиком и математиком-прикладником хорошо выразил один из создателей термодинамики и статистической физики Дж. Гиббс, который сказал, что чистый математик может делать все, что ему вздумается, но математик-прикладник должен, по крайней мере отчасти, внимать здравому смыслу.

Укажем основные направления развития чистой математики. Одно из таких направлений – это абстракция. Это направление в чистой математике началось, по существу, с построения неевклидовых геометрий, а также с введением Гамильтоном кватернионов. Математики поняли возможность существования различных абстрактных математических объектов, которые не могут быть связаны с реальным миром. Это направление процветает сегодня в различных абстрактных областях математики: абстрактная алгебра, топология, дифференциальная геометрия и т.д.

Другим направлением чистой математики является обобщение.

> *«Не нужно забывать, что существуют обобщения двух родов: малоценные и полноценные. Первые – обобщения путем разрежения, другие – путем сгущения. Разредить – значит, наболтав воды, изготовить жиденькую похлебку; сгустить – значит составить полезный питательный экстракт. Соединение понятий, мало связанных друг с другом для обычного представления, в одно объемлющее есть сгущение; так сгущает, например, теория групп рассуждения, которые прежде, будучи рассеянными..., выглядели совершенно различными. Привести примеры обобщения путем разряжения было бы еще легче, но мы не хотим наживать себе врагов» (Д. Пойа и Г. Сегё (48)).*

Д. Пойа уточняет сказанное выше:

> *«Существуют два рода обобщений: один дешевый, а другой ценный. Легче обобщить, разбавив маленькую идею большой болтовней. Приготовить очищенный и сгущенный экстракт из нескольких хороших составных частей значительно труднее».*

Обобщение математических утверждений тесно связано с абстрагированием, по-этому часто эти оба направления идут вместе. Чистая математика пополняется все время новыми областями математики, которые являются обобщениями и абстракциями тех математических теорий, которые возникают из прагматической математики, а также из абстрагирования решений практических задач. Появление и дальнейшее развитие квантовой механики оказало большое влияние на развитие различных разделов функционального анализа, интегральных и дифференциальных уравнений, теории обобщенных функций и т.п. Отметим также влияние развития радиосвязи на создание теории случайных процессов, которая после соответствующего обобщения и абстрагирования превратилась со временем в область чистой математики.

Пользуясь терминологией Пойа и Сегё, обобщение, связанное со «сгущением» обычно происходило на ранних этапах обобщения математических моделей решения прикладных задач. Такое обобщение давало возможность более четко понять математическую суть исследуемых проблем, что позволяло распространить новые методы и понятия на другие области практических приложений. Однако за обобщением «сгущения» обычно наступало обобщение «разряжения».

«Обобщение и абстракция, предпринятые с единственной целью – написать очередную статью для «отчета», как правило, не представляют собой ценности с точки зрения приложений. Подавляющее большинство работ такого рода посвящено переформулировке на более общем и более абстрактном языке с использованием новой терминологии того, что было известно раньше, но излагалась на более простом и частном языке. Что же касается приложений математики, то здесь такая переформулировка не дает ни более мощного метода, ни более глубокого понимания. Распространение новомодной терминологии, как правило, искусственной и не связанной ни с какими физическими идеями, хотя и направленной якобы на модернизацию идей, заведомо не способствует более эффективному применению математики, а, наоборот, затрудняет его. Это новый язык, но не новая математика» (М. Клайн, 33, с. 330).

В середине XX в. прикладная теоретическая математика получила дополнительный импульс для своего развития в связи с развитием вычислительной техники и компьютеров. В этот период стала быстро развиваться *вычислительная теоретическая математика*, основной целью которой была разработка вычислительных алгоритмов для решения различных математических задач, таких, как численное решение уравнений различного типа, вычисление значений различных математических функций, включая вычисление определенных интегралов, и т.п.

Вычислительный алгоритм, который был продуктом этой математики, отличался двумя особенностями. Во-первых, он оперировал математическими числами, а во-вторых, существовало доказанное утверждение, что этот алгоритм приводит к искомому результату. Отметим, что подобные алгоритмы встречались ранее, например, у Ньютона. Однако реализация этих алгоритмов была практически невозможной, ибо отсутствовали инструменты для проведения большого количества вычислений в ограниченное время.

В 30-е годы оформилась теория вероятностей как теоретическая математическая дисциплина, когда А. Колмогоров построил теорию вероятностей как аксиоматическую теорию. С этого момента стали существовать сразу две теоретические математики: детерминистская теоретическая математика и вероятностная математика. Вероятностная математика бурно развивалась в последующие годы, благодаря развитию старых дисциплин и появлению новых дисциплин, пришедших из исследования операций, таких как, например, математическая статистика, теория стохастических процессов, теория массового обслуживания и других, которые нашли свое применение в различных прикладных и технических областях знаний. Наряду с прикладным направлением в недетерминированной математике, бурно развивалась и так называемое «чистое» направление.

Созданная в XIX в. математическая логика, до второй трети XX в. выполняла роль только метаматематики, т.е. основное внимание уделялось проблемам математического доказательства и основаниям математики. Сюда, в частности, относятся проблемы аксиоматизации, непротиворечивости, полноты различных математических теорий. Среди основных достижений математической логики до второй трети XX в. отметим, во-первых, хорошо разработанный символьный язык, а, во-вторых, формальную логику, позволяющую записывать доказательство математических утверждений с помощью логических формул.

В начале XX в. начался вырабатываться новый подход к вопросу о доказуемости математических утверждений. Суть этого подхода заключалось в том, что доказательство утверждения заключалось в выполнении некоторого вычислительного алгоритма в рамках булевой алгебры. В зависимости от результата вычисления делается заключение о доказуемости утверждения. Другими словами, процесс логического доказательства был заменен процессом логического вычисления.

В связи с новым подходом появились и новые типы логических задач, решение которых привело к образованию таких логико-математических дисциплин, как теория алгорифмов, теория автоматов, теория машин Тьюринга, теория рекурсивных функций. Эти дисциплины, возникшие как чисто теоретические, позже, начиная с 40-х г., они стали служить теоретической основой при построении компьютеров и при создании различных языков программирования.

Теперь обратимся к мировой теоретической математике. Эта математика принципиально отличается от европейской теоретической математики.

Во-первых, мировая теоретическая наука отличается от европейской теоретической науки типом решаемых задач. Если европейская математика доказывает утверждения, то мировая математика численно решает задачи. Это означает, что европейская теоретическая математика относится к интеллектуальному познанию, в то время как мировая математика относится к прагматическому познанию.

Во-вторых, мировая теоретическая математика является *дискретной* математикой, которая оперирует либо целыми числами, либо прагматическими числами. В качестве примеров можно привести такие теории, как линейное программирование, комбинаторика, потоки на сетях, теория графов, теория кодов.

В-третьих, мировая теоретическая математика является *конечной математикой*, т.е. оперирует конечными множествами, в то время как европейская теоретическая математика оперирует бесконечными множествами.

В-четвертых, решение задач в рамках мировой теоретической математики осуществляется методом направленного перебора или полного перебора вариантов, т.е. индуктивным методом. Все задачи в рамках европейской теоретической науки решаются с помощью дедукции.

Как мы уже отмечали в параграфе 10.1, источниками мировой теоретической математики являлись исследование операций, кибернетика и системный подход, которые широко использовали в основе их практики и теории математические модели. При внедрении каждого из этих направлений возникали новые математические дисциплины, связанные с исследованием определенного типа математических моделей.

В построении математических моделей в рамках исследования операций можно выделить три широко распространенных и взаимосвязанных направления. *Во-первых*, основное внимание сосредоточено на построении и исследованию *оптимизационных* моделей, ибо основной целью всех операционных исследований является поиск и *выбор* на основании одного или нескольких критериев решения среди множества других решений. *Второе направление* связано с определением аналитических свойств математических моделей, включая чувствительность выбранного решения к изменению значений параметров модели, структуру этого решения и его характеристики. *Третье направление* связано с определением в явном виде взаимосвязей, характеризующих систему, в которой должна использоваться модель. Если первые два направления связаны с математикой, то третье направление относится к практическому использованию и внедрению выбранного решения.

Исторически первыми математическими дисциплинами, которые возникли в рамках исследования операций, были линейное программирование, которое возникло из задач оптимального раскроя материала и транспортной задачи, и теория массового обслуживания, которая возникла из анализа загрузки телефонных линий. Примеры решения практических задач из этих областей были решены до Второй мировой войны.

Затем в 50-х г. оформилась новая область исследования операций — динамическое программирование. Типичными задачами, которые решаются в рамках этой теории являются: разработка правил управления запасами, устанавливающих момент пополнения запасов и размер пополняющего заказа; разработка принципов календарного планирования производства и выравнивания занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию; определение необходимого объема запасных частей, гарантирующего эффективное использование дорогостоящего оборудования; распределение дефицитных капитальных вложений между возможными новыми направлениями их использования и другие.

В 50-е годы математические методы исследования операций бурно развивались в нескольких направлениях. *Во-первых*, линейное программирование было обобщено до нелинейного математического программирования, которое включало в себя, в частности, квадратичное, выпуклое. *Во-вторых*, появилось целочисленное программирование, из которого выделилось в отдельную дисциплину оптимальные задачи на сетях (теория потоков в сетях). *В-третьих*, математическое программирование и динамическое программирование были обобщены в такие отрасли, как стохастическое программирование и стохастическое динамическое программирование. *В-четвертых*, методы теории массового обслуживания привели в дальнейшем к изучению временных рядов, теория которых играет важнейшую роль в прогнозировании как экономических показателей, так и технических характеристик. *В-пятых*, развитие математической статистики позволило найти ей применение в оценке качества продукции, что привело к созданию теории планирования экспериментов.

Благодаря обобщениям и дальнейшей формализации, новые математические дисциплины вышли за пределы исследования операций и влились в чистую математику. К таким областям чистой математики относится так называемая математическая экономия, которая изучает различные математические теории, в основе которых лежат теоремы о магистралях.

Важно отметить, что ни одна из перечисленных выше математических дисциплин не могли появиться как часть европейской теоретической математики, ибо природа проблем, для решения которых они были созданы, лежит вне естествознания.

Развитие кибернетики также привело к появлению новых математических дисциплин. Напомним, что кибернетика как наука занимается изучением систем произвольной природы, способных передавать, воспринимать, хранить и обрабатывать информацию, используя ее для управления и регулирования происходящих процессов. Отсюда следует, что кибернетика, *во-первых*, стимулировала появление математических дисциплин, изучающих проблемы, кодирования, передачи и декодирования информации сообщений. Таким образом, появились математические теории: теория информации, теория кодов, теория кодирования, теория передачи сообщений, теория декодирования. Теории кодирования, декодирования и кодов являются дискретными детерминискими математическими теориями, где широко используются классические разделы алгебры. Теория передачи сообщений является одной из разновидностей теории случайных процессов, которая является непрерывной вероятностной дисциплиной.

Во-вторых, в связи с тем, что кибернетика занимается проблемами управления систем различной природы, то возникли ряд новых математических дисциплин, связанных с этими проблемами. Прежде всего, отметим *теорию принятия решений*. Эта теория возникла, по существу, из книги Д.фон Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономического поведения» (1944), в которой были заложены математические основы теории игр и оптимальных стратегий в них. В этой книге авторы попытались математически описать характерные для экономики явления как некоторую игру. В частности, ставили задачу оптимизации поведения субъектов рынка. Несмотря на то, что в теории игр рассматриваются оптимальные задачи, ее можно отнести скорее к кибернетике, нежели к исследованию операций, ибо она в своем первоначальном виде носит чисто формальный, математический характер. Поэтому она дала мощный начальный толчок для развития математической экономии и других разделов теоретической математики.

В-третьих, выдвинув принцип обратной связи в качестве одного из общих принципов управления не только в технических системах, но и в более сложных системах, математические модели, принятые в теории автоматического управления, удалось распространить, в частности, на экономические системы. Это привело к тому, что динамические математические модели стали широко использоваться, что не только расширило области исследования математической экономии, но и способствовало развитию эконометрики.

Системный подход и связанные с ним системные дисциплины по своей природе не могли внести существенный вклад в развитие теоретической математики. Их вклад в развитие мировой математики в значительной мере относится к мировой прагматической математике, о чем мы будем говорить в следующем параграфе. Единственным примером, относящимся к теоретической математике, можно считать абстрактную теорию систем, которая, по своей сути, имеет ограниченное отношение к системной тематике, основанной на системном подходе.

10.3. Европейская прагматическая математика в настоящее время.

Начиная со второй трети XX века, прагматическая математика развивалась в двух различных направлениях. Источником первого направления было естествознание и технологическое развитие цивилизации, а источником второго направления была мировая наука, которая базировалось на развитии науки управления, экономической науки, психологии и многих других областей знаний.

Как мы уже отмечали выше, в конце XIX века принципиально изменилась роль прагматической математики: она стала языком технического прогресса. Инженеры и техники, занятые в технологическом развитии начали говорить на языке прикладной математики. Все разработки новых технологий в XX веке требовали проведения необходимых математических расчетов. Да и традиционные отрасли, такие, как строительство, машиностроение и т.п., для обоснования тех или иных решений начали все шире использовать количественные расчеты. Эти расчеты были направлены на предсказание тех или иных технических решений.

Так как основные научно-технические расчеты были основаны на самых современных математических теориях, то резко возросла роль тех отраслей прагматической математики, которая должны были численно решать линейные и нелинейные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, интегральные уравнения, вычислять численные значения сложнейших математических функций, искать собственные значения матриц большого размера и т.д. и т.п.

Мировая математика, возникшая во второй трети XX века, послужила одним из основных инструментов в процессе подготовки и принятия управляющих решений на разных иерархических ступенях систем управления различными искусственными системами, включая те, в которые в качества элемента входит человек. Как мы уже отмечали в параграфе 10.1, для удовлетворения возросших потребностей возник целый ряд математических дисциплин, в которых используются совершенно различные математические объекты.

В основе мировой математики, как мы уже неоднократно отмечали, лежат математические дисциплины, которые родились и выросли из исследования операций, кибернетики и системного подхода.

Исследование операций привело к созданию дисциплин дискретной прагматической математики, каждая из которых появились в результате решения практических задач определенного типа. Прежде всего, отметим линейное программирование, теорию массового обслуживания, потоки в сетях, теорию планирования экспериментов, оценку эффективности систем вооружения и простых технических систем.

Кибернетика вызвала к жизни ряд прагматических математических дисциплин, связанных с передачей информации: теорию кодирования и декодирования, теорию информации, теорию принятия решений, теорию надежности, теорию случайных процессов, теорию временных рядов, теорию распознавания образов, теорию автоматического регулирования и т.д.

Системный подход в рамках системного анализа развил различные формализованные методы анализа и проектирования сложных систем и их систем управления. Эти методы основываются на применении математических методов и моделей, благодаря установлению различных количественных связей между элементами системы, а также между характеристиками системы в целом. Практическое применение этих методов возможно только при использовании компьютеров.

В качестве одного из примеров указанных формализованных методов можно указать так называемые эвристические методы в подготовке управляющих решений. Сюда относятся методы организации и обработки экспертных оценок (метод дельфи, «мозговой штурм» и т.п.).

Другим примером является так называемое имитационное моделирование. Под имитационным моделированием понимается набор численных методов проведения компьютерных экспериментов с математическими моделями, описывающих поведение системы для определения интересующих нас функциональных характеристик. Появление имитационного моделирования и превращение его в эффективное средство анализа сложных систем было, с одной стороны, обусловлено потребностями практики, а с другой стороны, обеспечено развитием метода статистических испытаний (метода Монте-Карло), открывшего возможность моделирования случайных факторов, которыми изобилуют реальные системы, а также развитием компьютеров, являющихся базой для проведения статистических экспериментов.

Мы привели здесь простое перечисление почти всех отраслей мировой прагматической математики. Необходимо отметить, что реальность практической деятельности постоянно приводит к появлению все новых отраслей прагматической математики. Однако такое простое перечисление отраслей прикладной математики содержит в себе мало полезной информации. Гораздо больший интерес представляет обсуждение тех общих проблем, с которыми сталкивается каждая отрасль или дисциплина. Дальнейшее содержание этого параграфа состоит в обсуждении общих проблем прагматической математики с помощью языка математического моделирования.

Созданная в середине XX века методология моделирования позволяет нам по новому взглянуть на математические дисциплины. В основе этой методологии лежит одно основное предположение, которое заключается в том, что все знания об исследуемом объекте получаются с помощью той или иной модели этого объекта. Мы не будем обсуждать здесь философские аспекты этого предположения, только заметим, что принятие этого априорного утверждения обычно не вызывает достаточно обоснованных возражений.

Прежде чем начать рассмотрение решение прикладных математических задач с как процесс моделирования, сделаем еще одно предположение: ниже мы *будем рассматривать только такие математические задачи целью, которых является получение конкретного числа или набора конкретных чисел*. Напомним, что под конкретным числом понимается число, которое можно записать в десятичной позиционной системе с помощью конечного числа цифр. Такие числа мы назвали *прагматическими числами*.

Все рассматриваемые прагматические задачи мы можем разделить на две группы: первая группа — это задачи, относящиеся только к математическим объектам, а вторая группа — это задачи, относящиеся к нематематическим объектам. В качестве примеров задач из первой группы можно привести такие, как нахождение численных значений математических функций, численное решение уравнений и т.п. К задачам из второй группы относятся задачи их физики, экономики и т.п., в которых требуется найти числовые решения.

Как мы уже говорили выше, любой процесс математического моделирования распадается на несколько этапов. Первый этап состоит в формулировке цели моделирования. На втором этапе строится соответствующая цели математическая модель. Третий этап заключается в исследовании модели, в результате которого получается вариант решения задачи. На четвертом этапе принимается решение о том, является ли предлагаемый вариант искомым решением задачи или нет? В случае положительного ответа процесс моделирования прекращается. Если получен отрицательный ответ, то процесс моделирования может быть продолжен с изменением условий одного из предыдущих этапов. Изменение условий означает либо изменение цели моделирования, либо выбор другой модели, отличающейся от предыдущей, либо изменение метода исследования и т.п. Из сказанного следует, что процесс моделирования, в общем случае, является итеративным процессом.

В одном и том же процессе моделирования могут быть одновременно использоваться несколько моделей, написанные на разных языках моделирования. Моделирование называется *двухмодульным моделированием*, если используются одновременно две модели, написанные на разных языках. Аналогично определяются понятия *трехмодульное* и, вообще, *n-модульное* моделирование.

Мы начнем с исследования решения вычислительной задачи, связанной с математическим объектом, как процесса моделирования. Примером такой задачи может служить вычисление значения математической функции при определенном значении аргумента.

Для иллюстрации рассмотрим задачу вычисления значения функции $y = \sin x$ при значении аргумента $x = x_0$. Современный математик обычно решает эту задачу следующим путем. При определенных условиях он заменяет эту функцию соответствующим отрезком степенного ряда, затем вычисляет значение этой формулы при требуемом значении аргумента. Вычисленное значение формулы признается численным значением функции, если оно удовлетворяет определенному критерию, выбранному заранее.

Рассмотрим описанный выше процесс вычисления как процесс моделирования. Цель моделирования — это формулировка задачи: вычислить значение функции при заданном значении аргумента.

Построение модели заключается в выборе вычислительного алгоритма, относительно которого *доказывается*, что использование его приводит к искомому результату. В общем случае, вычислительный алгоритм в теоретической математике представляет собой набор (обычно, бесконечный) математических формул, применение которых дает последовательность математических чисел, относительно которой доказывается ее сходимость к искомому значению. Однако построенная последовательность состоит из математических чисел и сходится к математическому числу, каждый из которых в общем случае не является конкретным числом, т.е. прагматическим числом.

Таким образом, для проведения конкретного вычисления мы должны из набора формул выбрать одну или несколько формул. Чтобы из бесконечного набора формул выбрать конечный набор формул, необходимо существование или построения критерия, с помощью которого и осуществляется выбор. Этот выбор не является формальным процессом, а зависит от субъективных качеств лица, выполняющего вычисление. Здесь мы впервые встречаемся с тем, что для продолжения процесса вычисления необходимо принять *субъективное* решения, которое использует формальный критерий.

Предположим, что из набора формул выбирается формула, которая используется в последствии для вычисления. На эту формулу можно посмотреть с двух сторон. *С одной стороны*, это *математическая* формула, определенная на математических числах, причем результат вычисления является математическим числом. В этом случае значение аргумента может быть любым математическим числом из области определения функции. В этом случае мы находимся в рамках теоретической математики. *С другой стороны*, на формулу можно посмотреть как на символическую запись методики проведения конкретных вычислений на основе конкретных значений символов, входящих в формулу. В этом случае эта формула — *прагматическая* формула, и мы уже находимся в рамках прагматической математики.

Резюмируя сказанное, можно сказать, что хотя мы имеем одну и ту же формулу, однако — две модели: одна из которых — теоретическая модель, а другая — прагматическая модель. Одна модель написана на языке теоретической математики, а другая — на языке прагматической математики. Таким образом, *задача вычисления конкретного значения функции приводит к двухмодульному моделированию*.

Третий этап — исследование модели, т.е. процесс проведения процесса вычислений — состоит из двух шагов. *Первый шаг* заключается в том, что мы рассматриваем выбранную формулу как математическую формулу и с помощью соответствующих математических преобразований приводим к виду, более удобному для проведения самого процесса вычислений. В этом случае приходится *доказывать,* что преобразованная формула математически эквивалентна первоначальной. Описанные действия производятся в рамках теоретической математики.

Второй шаг третьего этапа заключается в проведении самого процесса вычисления. Здесь мы сталкиваемся с одной из принципиальных проблем вычислений, которая заключается в следующем. В рамках теоретической математики рассматриваемая математическая формула практически всегда *имеет* смысл, т.е. после действий над математическими числами приводит к некоторому математическому числу. Исключение составляют случаи, когда происходит столкновение с делением на нуль. Трудность заключается в том, что обычно нет никакой возможности представить результат с помощью цифр и вспомогательных символов.

Однако та же формула, рассматриваемая в рамках прагматической математики, практически всегда *не имеет* смысла. Это происходит потому, что мы вместо математических чисел подставляем в формулу прагматические числа. Но тогда мы сталкиваемся с тем, что деление двух прагматических обычно не определенно. Только формулы, в которых встречаются лишь операции сложения, вычитания и умножения, имеют всегда смысл при подстановке прагматических чисел.

Математики при делении двух прагматических чисел изобрели прием, который заключается в приписывании в качестве результата некоторого прагматического числа, полученного с помощью «деления с округлением». Это значит, что в качестве результата деления одного прагматического числа на другое берется прагматическое число, которое называют «приближенным значением». Использование термина «приближенное значение» связано с тем, это значение рассматривается как «приближение» к математическому числу, которое получается в результате деления двух прагматических чисел в рамках теоретической математики. Сразу же отметим, что операция приписывания приближенного значения является многозначной операцией, т.е. к одному и тому же математическому числу существует бесконечное число приближенных значений.

Описанный только что прием позволяет каждой формуле из прагматических чисел сопоставить определенное «приближенное значение», которое может быть выбрано из множества возможных значений. Выбранное описанным способом приближенное значение формулы обычно *принимается* за значение функции при фиксированном значении аргумента.

Таким образом, сам процесс конкретного вычисления не является строго формализованным. Результат этого процесса существенно зависит от количества «приближений», а также от способа выбора приближения в каждом конкретном действии. Иначе говоря, третий этап моделирования, в целом, содержит в себе процесс принятия решений, т.е. определенный субъективный фактор.

В силу сказанного, процесс вычисления конкретного значения функции при конкретном значении аргумента приводит к множеству значений, из которых тем или иным способом *выбирается единственное* значение.

Четвертый этап заключается в принятии решения о том, можно ли выбранное значение рассматривать как решение поставленной задачи. Естественно, что для принятия этого решения необходимо обладать критерием, с помощью которого можно принять требуемое решение. Этот критерий называется *критерием достижения цели моделирования.* В случае, если найденное значение удовлетворяет выбранному критерию, то это значение признается решением задачи.

Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, когда задача формулируется в терминах теоретической математики, а решение получается в виде прагматических чисел. Поэтому возникает еще один принципиальный вопрос: какое отношение имеет выбранный результат в виде прагматического числа, полученный на основе субъективного решения к «истинному» значению функции, которое является математическим числом? Ответ на этот вопрос не является простым и требует более глубокого обсуждения, которое выходит за рамки настоящей книги. Важно отметить, что подход к методологии математических исследований с позиции моделирования позволяет выявить достаточно глубокие проблемы, которые принятым ранее путем нельзя было четко сформулировать. Более того, язык моделирования, возможно, сможет послужить и для формулирования тех или иных ответов на эти проблемы.

Теперь вкратце охарактеризуем с позиции моделирования вычислительные задачи второй группы. Эти вычислительные задачи вытекают при решении прикладных задач, связанных с физикой, экономикой и т.д.

Для решения практических задач, связанных с реальными объектами или явлениями, прежде всего строится модель на некотором содержательном языке: в физике — на языке некоторой физической теории, в экономике — на языке одной из экономических теорий и т.п. Эту модель условно назовем *содержательной моделью*. Затем для исследования содержательной модели строится теоретико-математическая модель. А для получения количественных результатов, связанных с этим исследованием необходимо уже применить вычислительную модель. Таким образом, решение вычислительной задачи второй группы связано с *трехмодульным моделированием*.

Применение трехмодульного моделирования, в свою очередь, требует наличия трех критериев: два критерия, на основании которых принимаются решения о соответствии одной модели другой, третий — это критерий, на основании которого принимается решение о соответствии полученных численных результатов поставленной задаче. Третий критерий играет ключевую роль во всем процессе моделирования, ибо он, как бы подводит черту под всей проделанной работой. В частности, он может состоять в сравнении полученных численных результатов с другим набором чисел, полученных другим путем, например, из эксперимента или наблюдений.

Как и в предыдущем случае, результат процесса моделирования устанавливается в результате выбора, в котором не последнюю роль играют субъективные предпочтения исследователей.

Глава 11. Компьютерная математика.

Недостойно одаренному человеку тратить, подобно рабу, часы на вычисления, которые можно было бы доверить любому лицу, если бы при этом применить машину.

Г.Б. Лейбниц

11.1. Компьютеры.

Одним из основных факторов, оказавшим принципиальное влияние на свершение и на развитие третьей интеллектуальной революции, было появление и широкое внедрение компьютеров во все стороны человеческой цивилизации. Внедрение и использование компьютеров в различных направлениях связано с построением компьютерных моделей различных объектов, в том числе и сложных систем. Возможности компьютерных моделей, прежде всего, зависят от технических свойств компьютеров, а также от технологии программирования, с помощью которой строится компьютерная модель. Чтобы оценить эти возможности в настоящем и увидеть тенденции развития в будущем, необходимо, рассмотреть развитие компьютеров и технологии программирования в исторической перспективе.

Начнем с краткого очерка технологического развития компьютерной техники. Первый работающий компьютер Z3 был построен К. Цузе в 1941 году. Он был построен на телефонных реле и управлялся с помощью программы, записанной на перфорированной пленке. Во многих отношениях Z3 была подобна современным компьютерам, ибо в ней впервые применялась арифметика с плавающей запятой. Кроме того, она была построена на двоичной системе представления чисел. Английский специализированный компьютер Coloss был первым полностью электронным вычислительным устройством. Созданный в середине 40-х годов американский компьютер ЭНИАК можно назвать первым электронным компьютером общего назначения. Он, в частности, использовался для проведения баллистических расчетов.

Значительное продвижение в области компьютеров связано с появлением отчета Дж. фон Неймана, в котором описывается проект компьютера, в котором программа и данные хранятся в единой универсальной памяти. Принципы построения компьютера, описанные в проекте, получили название «архитектура фон Неймана», стали основой для разработки первых универсальных компьютеров. Среди компьютеров, построенных по этой технологии, отметим английский компьютер LEO I, который впервые в мире стал регулярно использоваться для рутинной офисной работы, и американский компьютер UNIVAC I, который был первым массово производимым компьютером. Этот компьютер был установлен, в частности, в Бюро переписи населения США и стал использоваться для обработки макроэкономической экономической информации. Компьютеры этого типа получили название «компьютеры первого поколения». Дальнейшее развитие компьютеров последующих поколений связано с революционными достижениями в развитии различных технологий и технических средств.

Второе покорение компьютеров связано с применением транзисторов, применение которых вместе с печатными схемами позволило существенно уменьшить размеры компьютеров и потребление ими электроэнергии, а также увеличить надежность их работы. Эти технические усовершенствования позволили производить компьютеры большими сериями. Одним из примеров таких компьютеров может служить универсальная компьютерная система IBM System/360. Однако компьютеры второго поколения по-прежнему были довольно дорогими и были доступны только университетам, правительственным учреждениям и крупным компаниям.

Бурный рост использования компьютеров начался с так называемым «третьим поколением» вычислительных машин. Начало этому положило изобретение интегральных схем, что позже привело к изобретению микропроцессоров. Появление микропроцессоров привело к разработке микрокомпьютеров, которыми уже могли владеть небольшие компании и отдельные люди. Новая эра в применении микрокомпьютеров началась в начале 80-х годов с появлением персонального компьютера IBM PC. С этого момента началось массовое внедрение компьютеров в повседневную жизнь людей.

Управление компьютерами осуществляется с помощью программ. Процесс создания программ называется программированием. Технологией программирования называют совокупность методов и средств, используемых в процессе создания программ. Как и любая другая технология, технология программирования представляет собой набор технологических инструкций, включающих: указание последовательности выполнения технологических операций; перечисление условий, при которых выполняется та или иная операция; описания самих операций, где для каждой операции определены исходные данные, результаты, а также нормативы, инструкции, стандарты и т.п. Кроме набора операций и их последовательности, технология также определяет способ описания проектируемой системы, т.е. модели, используемой на каждом этапе разработки. Различают технологии, используемые на конкретных этапах разработки или для решения отдельных задач этих этапов, и технологии, охватывающие несколько этапов или весь процесс разработки. В основе первых, как правило, лежит ограниченно применяемый метод, позволяющий решить конкретную задачу. В основе вторых обычно лежит базовый метод или подход, определяющий совокупность методов, используемых на разных этапах разработки, или методологию.

Чтобы разобраться в существующих технологиях программирования и определить основные тенденции их развития, целесообразно рассматривать эти технологии в исторической перспективе, выделяя основные этапы развития программирования. *Первый этап в развитии программирования* – это «стихийное» программирование. Этот этап охватывает период от момента появления первых вычислительных машин и до середины 60-х годов XX века. В этот период практически отсутствовали сформулированные технологии, и программирование фактически было искусством. Первые программы имели простейшую структуру. Они состояли из собственно программы на машинном языке и обрабатываемых ею данных. Сложность программы в машинных кодах ограничивалась способностью программиста одновременно мысленно отслеживать последовательность выполняемых операций и местонахождение данных при программировании. Создание языков программирования высокого уровня, таких, как FORTRAN и ALGOL, существенно упростило программирование вычислений, снизив уровень детализации операций, что позволило увеличивать сложность программ.

Революционным было появление в языках средств, позволяющих оперировать подпрограммами. Подпрограммы можно было сохранять и использовать в других программах. В результате были созданы огромные библиотеки расчетных и служебных подпрограмм, которые вызывались по мере надобности из разрабатываемой программы.

Сложность разрабатываемого программного обеспечения при использовании подпрограмм по-прежнему ограничивалась возможностью программиста отслеживать процессы обработки данных, но уже на новом уровне. Только появление средств поддержки подпрограмм позволило осуществлять разработку программного обеспечения несколькими программистами параллельно.

В начале 60-х годов разразился «кризис программирования», который был навеян несовершенством технологии программирования, который заключался, прежде всего, в том, что процесс тестирования и последующего исправления программ занимал более 80% времени разработки, если вообще когда-нибудь заканчивался. На повестке дня самым серьезным образом стоял вопрос разработки технологии создания сложных программных продуктов, снижающих вероятность ошибок программирования. Анализ причин возникновения большинства ошибок позволил сформулировать новый подход к программированию, который был назван «структурным».

Второй этап – структурный подход к программированию (60-70-е годы). Структурный подход к программированию представляет собой совокупность рекомендуемых технологических приемов, охватывающих выполнение всех этапов разработки программного обеспечения. В основе структурного подхода лежит декомпозиция сложных систем с целью последующей реализации в виде отдельных подпрограмм. С появлением других принципов декомпозиции (объектного, логического и т.п.) данный способ получил название процедурной декомпозиции. В отличие от используемого ранее процедурного подхода к декомпозиции, структурный подход требовал представления задачи в виде иерархии подзадач простой структуры. Проектирование, таким образом, осуществлялось «сверху-вниз» и подразумевало реализацию общей идеи. Одновременно вводились ограничения на конструкции алгоритмов, рекомендовались формальные модели их описания, а также специальный метод проектирования алгоритмов – метод пошаговой детализации. Поддержка принципов структурного программирования была заложена в основу так называемых процедурных языков программирования, к которым относятся такие языки, как PL/1, ALGOl-68, PASCAL, C.

Дальнейший рост сложности и размеров разрабатываемого программного обеспечения потребовал развития структурирования данных. Как следствие этого в языках появляется возможность определения познавательских типов данных. В результате появилась и начала развиваться технология модульного программирования. *Модульное программирование* позволяет выделить группы программ, использующие одни и те же данные, в отдельно компилированные модули (библиотеки подпрограмм), например, модуль графических ресурсов, модуль подпрограмм вывода на печатное устройство. Связи между модулями при этом осуществляется через специальный интерфейс, в то время как доступ к реализации модуля (телам программ и «внутренним» переменным) запрещен. Эту технологию, например, поддерживают современные версии языков PASCAL и C (C++).

Использование модульного программирования существенно упростило разработку программного обеспечения несколькими программистами. Теперь каждый из них мог разрабатывать свои модули независимо, обеспечивая взаимодействие модулей через специально оговоренные межмодульные интерфейсы. Кроме того, модули в дальнейшем без изменений можно было использовать в других разработках, что повысило производительность труда программистов. Узким местом модульного программирования является то, что ошибка в интерфейсе при вызове подпрограмм выявляется только при выполнении программы, так как из-за раздельной компиляции модулей обнаружить эти ошибки ранее невозможно. При увеличении размера программы обычно возрастает сложность межмодульных интерфейсов, и с некоторого момента предусмотреть взаимовлияние отдельных частей программы становится практически невозможно. Для разработки программного обеспечения большого объема было предложено использовать объективный метод.

Третий этап – объективно-ориентированное программирование (с середины 80-х годов – до конца 90-х годов). Объективно-ориентированное программирование определяется как технология создания сложного программного обеспечения, основанная на представлении программы в виде совокупности объектов, каждый из которых является экземпляры определенного типа (класса), а классы образуют иерархию с наследованием свойств. Взаимодействие программных объектов в такой системе осуществляется путем передачи сообщений. Основным достоинством объективно-ориентированного программирования является «более естественная» декомпозиция программного обеспечения, которая существенно облегчает ее разработку. Это приводит к более полной локализации данных и интегрированием их с подпрограммами обработки, что позволяет вести практически независимую разработку отдельных частей (объектов) программы. Кроме того, объектный подход предлагает новые способы организации программ, основанные на механизмах наследования, полиморфизма, композиции и наполнения. Эти механизмы позволяют сложные объекты из сравнительно простых объектов.

Бурное развитие технологий программирования, основанных на объектном подходе, позволило решить многие проблемы. Так были созданы среды, поддерживающие визуальное программирование. При использовании визуальной среды у программиста появляется возможность проектировать некоторую часть, например, интерфейсы будущего продукта, с применением визуальных средств добавления и настройки специальных библиотечных компонентов. Результатом визуального программирования является заготовка будущей программы, в которую уже внесены соответствующие коды. Недостатком этого подхода является то, что сохраняется зависимость модулей программного обеспечения от адресов экспортируемых полей и методов, а также структур и форматов данных. Эта зависимость объективна, так как модули должны взаимодействовать между собой, обращаясь к ресурсам друг друга. Связи модулей нельзя разорвать, но можно стандартизировать их взаимодействие, на чем основан компонентный подход к программированию.

Четвертый этап – компактный подход и CASE-технологии (с середины 90-х годов и до середины первого десятилетия XXI века). Компонентный подход предполагает построение программного обеспечения из отдельных компонентов физически отдельно существующих частей программного обеспечения, которые взаимодействуют между собой через стандартизированные двоичные интерфейсы. В отличие от обычных объектов объекты-компоненты можно собрать в динамически вызываемые библиотеки или исполняемые файлы, распространять в двоичном виде (без исходных тестов) и использовать в любом языке программирования, поддерживающем соответствующую технологию. Компонентный подход лежит в основе технологии, разработанной на базе COM. Технология COM определяет общую парадигму взаимодействия программ любых типов: библиотек, приложений, операционной системы, т.е. позволяет одной части программного обеспечения использовать функции (службы), представляемой другой, независимо от того, функционируют ли эти части в пределах одного процесса, в разных процессорах на одном компьютере или на разных компьютерах. Модификация COM, обеспечивающая передачу вызовов между компьютерами, называется DCOM.

По технологии COM приложение предоставляет свои службы, используя специальные объекты – объекты COM, которые являются экземплярами классов COM. Объект COM так же, как обычный объект, включает поля и методы, но в отличие от обычных объектов каждый объект COM может реализовать несколько интерфейсов, обеспечивающих доступ к полям и функциям. Это достигается за счет организации отдельной таблицы адресов методов для каждого интерфейса (по типу виртуальных методов). При этом интерфейс объединяет несколько однотипных функций. На базе технологии COM и ее распределенной версии DCOM были разработаны компонентные технологии, решающие различные задачи разработки программного обеспечения.

Отличительной чертой последующего этапа развития технологии программирования, кроме изменения подхода, является создание и внедрение автоматизированных технологий разработки и сопровождения программного обеспечения, которые были названы CASE-технологиями (Computer-Aided Software/System Engineering). Без средств автоматизации разработка достаточно сложного программного обеспечения на настоящий момент становится трудно осуществимой: память человека уже не в состоянии фиксировать все детали, которые необходимо учитывать при разработке программного обеспечения.

Большинство современных программных систем объективно очень сложны. Эта сложность обуславливается многими причинами, главной из которых является логическая сложность решаемых ими задач, которая все возрастала в зависимости от развития компьютерной техники и технологии программирования.

Развитие компьютеров и средств программирования происходит быстрыми темпами. Каждые несколько лет происходит технологический сдвиг в производстве компьютеров, резко повышающий производительность и технологические возможности их. В подобные сроки происходят революционные изменения и в программном обеспечении, которые позволяют не только улучшить качество работы программистов, но и позволяет решать все более сложные проблемы.

11.2. Компьютерная математика.

Человечество с давних времен старалось изобрести и применить различные приспособления для облегчения счета и вычислений. В предыдущих главах было уделено много места описанию достижений на этом пути, который на современном этапе характерен созданием различного рода компьютеров. Одним из величайших достижений мировой интеллектуальной революции является изобретение и широкое внедрение компьютеров во все ячейки повседневной жизни. Конечно, технический и технологический потенциал, заложенный в компьютеры, велик, и его роль трудно переоценить: без стремительного развития технологии вряд ли современные компьютеры обладали такими техническими возможностями, о чем мы уже говорили в предыдущем параграфе.

Однако необходимо отметить, что и без выдающихся интеллектуальных достижений, которые были получены во второй трети XX века, вряд ли технические возможности компьютеров были бы использованы в той мере, что мы видим сегодня. Значительная часть этих достижений связана с развитием математической логики и ее разделов.

Во-первых, логики изобрели символьный язык, который позволил записывать доказательство математического утверждения в виде последовательности однозначно определенных символов арифметических и логических операций, а также символов математических объектов. Эта последовательность носит двойственный характер. С одной стороны — это символическая запись (протокол) математического утверждения, а с другой стороны — это инструкция, которая описывает методику проведения доказательства.

Во-вторых, дальнейшее развитие формального подхода к записи математического доказательства привело к тому, что процесс проведения доказательства заменили процессом «вычисления». Так появились такие логические дисциплины, как теория автоматов, теория рекуррентных функций, теории машин Тьюринга, которые, в частности, занимались указанным вопросом.

В третьих, указанные теории подготовили почву для разработки не только логических принципов построения вычислительных машин, которые нашли применение при техническом осуществлении, но и принципов организации программного обеспечения, которые, в частности, были впоследствии использованы при построении языков программирования.

Развитие компьютерной техники привело к возникновению компьютерной математики — нового типа математики. Она является «вычислительной» математикой, т.е. результатом решения любой задачи в ее рамках является набор чисел. В этом смысле компьютерная математика напоминает прагматическую математику.

Компьютерная математика, как мы уже отмечали, возникла из потребностей автоматизировать проведение большого количества вычислений при решении математических задач. Поэтому она тесно связана с другими типами математики: европейской — теоретической и прагматической, а также с мировой математикой. Для выяснения отличительных особенностей компьютерной математики, а также ее связей с другими математиками, воспользуемся языком моделирования.

Пусть нам необходимо численно решить определенную математическую задачу, которая сформулирована на языке теоретической математики. Для решения этой задачи строится модель, которая состоит из нескольких модулей, причем каждый модуль представляет собой, в свою очередь, многомодульную модель. Выбор того или иного модуля можно рассматривать как этап построения многомодульной модели.

Первый модуль является математической моделью, язык моделирования которой совпадает с языком формулировки задачи. В рамках этой модели надо выбрать теоретический вычислительный алгоритм, а затем доказать, что его применение приводит к искомому результату. Обычно этот результат представляет собой предел последовательности промежуточных решений, полученных с помощью промежуточных вычислительных алгоритмов, каждый из которых можно рассматривать как промежуточную модель. Для выбора этого алгоритма необходимо установить некоторый критерий, с помощью которого выбирается этот алгоритм. В результате выбора мы получаем *второй модуль.*

Вернемся к нашему примеру из 11.1. Предположим, что задача состоит в вычислении значения функции $f(x) = sin\ x$ при значении $x = x_0$. Для вычисления обычно используют частичные суммы бесконечного степенного ряда, который фигурирует в определении этой функции. Последовательность значений частичных сумм при

$x = x_0$ сходится к $f(x_0)$. Частичную сумму можно рассматривать как промежуточный алгоритм и как промежуточную математическую модель. Поэтому необходимо иметь критерий (способ), чтобы выбрать определенную частичную сумму для вычислений.

Для того, чтобы произвести вычисления, как мы уже говорили в параграфе 11.1, необходимо перейти к прагматической модели. Эта модель совпадает по написанию со вторым модулем, а отличается только толкованием, ибо она оперирует прагматическими числами. Случай, когда объем вычислений по модели незначителен и их можно выполнить без помощи компьютеров, мы уже рассмотрели раньше. Теперь рассмотрим случай, когда объем вычислений настолько большой, что для их выполнения необходимо воспользоваться помощью компьютеров.

Для того, чтобы воспользоваться компьютером, необходимо «перевести» выбранную модель на «естественный» язык компьютера. Этот «перевод» выполняется в два этапа. На первом этапе используется программный язык, являющийся промежуточным между двумя языками: математическим и «естественным» языком компьютера, с помощью которого производятся вычисления. Целью использования программного языка является оказание эффективной помощи в переводе вычислительных процедур с математического языка на язык компьютера.

С помощью компьютерного языка и вспомогательных средств программирования второй модуль «записывается» в виде программы. На эту программу можно посмотреть как на модель, представленную на специальном языке. Ее в этом смысле можно считать *третьим модулем* в той модели, которая является нашей целью. Но тогда возникает вопрос, каким образом можно определить «качество перевода», т.е. в какой степени программа соответствует модели. Другими словами, должен существовать критерий, с помощью которого мы можем принять решение о соответствии третьего модуля второму модулю. Нахождение такого критерия часто представляет собой достаточно трудную задачу.

В отличие от второго модуля, программа, т.е. третий модуль, несет двойную нагрузку. С одной стороны, она представляет собой модуль (модель), а с другой стороны — это программа, по которой компьютер исследует модель, т.е. производит вычисления.

Второй этап «перевода» состоит в использовании компилирующей системы, которая завершает этот процесс, сопоставляя программе набор сигналов, которые могут быть «поняты» компьютером. Этот набор сигналов, полученный в результате компиляции программы, можно рассматривать как *четвертый модуль* модели. Использование этого модуля приводит к набору чисел, которые рассматриваются как результат процесса вычисления.

Прежде чем перейти к обсуждению полученных результатов, необходимо отметить, что должен существовать критерий, который должен дать основание для принятия решения о соответствии четвертого модуля третьему модулю, ибо в процессе компиляции программы могут происходить сбои. Этот критерий носит в значительной мере технический характер.

Теперь возникает вопрос о том, можно ли полученные числовые результаты считать решением поставленной задачи. Естественно для ответа на этот вопрос нужно опять-таки вооружиться определенным критерием, который назовем *глобальным критерием.* Этот критерий называется глобальным потому, что его выбор зависит только от постановки задачи, а не от пути решения задачи. Более того, он обычно формулируется вместе с постановкой задачи.

Как мы уже отмечали ранее, процесс решения задачи является итеративным процессом, ибо если в конце процесса вычисления получается результат, не удовлетворяющий глобальному критерию, то процесс вычисления повторяется при изменении выполнения того или иного этапа.

Резюмируя, можно утверждать, что при выполнении любой математической вычислительной процедуры мы имеем дело с четырьмя различными языками:

— математическим языком, на котором формулируется вычислительная задача (теоретическая математика),

— математическим языком, на котором задается вычислительный алгоритм (процедура) (прагматическая математика);

— программным языком, являющимся промежуточным между двумя языками: математическим языком и «естественным» языком компьютера, с помощью которого производятся вычисления; целью использования этого языка является оказание эффективной помощи в переводе вычислительных процедур с математического языка на язык компьютера;

— «естественным» языком компьютера, с помощью которого производятся вычисления.

С этими языками связаны две системы перевода:

— система программирования, которая «переводит» с математического языка на язык компьютерной программы;

— компилирующая система, переводящая с языка программ на язык компьютера.

Модель, которая используется при решении задачи, состоит из четырех модулей, трех промежуточных критериев и одного глобального критерия.

Теперь мы можем определить, что понимается под компьютерной математикой. Под *компьютерной математикой* понимается та часть общего процесса моделирования, которая относится к построению третьего и четвертого модулей, к выбору двух промежуточных критериев, а также наложение ограничений определенного сорта на выбор глобального критерия. В рамках компьютерной математики не рассматриваются никакие технические проблемы, связанные с технологией функционирования компьютеров, а представляют интерес только те содержательные ограничения, которые накладывают использование компьютеров на процесс моделирования.

Подробное рассмотрение компьютерной математики выходит за рамки этой книги. Однако необходимо отметить, что компьютерная математика выдвинула ряд специфических проблем, которые ранее не встречались. Перечислим некоторые из них.

Объектами, которыми оперирует компьютерная математика, являются компьютерные числа. Они принципиально отличаются от математических и прагматических чисел (см. параграф 11.3). Эта особенность существенно влияет на весь процесс вычислений.

Суть других особенностей заложена в прямом и обратном «переводе» в процессе моделирования с языка прагматической математики на язык компьютеров. Одна проблема заключается в определении, насколько «перевод» математической модели на компьютерный язык соответствует самой модели. Другая проблема состоит в оценке того, насколько перевод результатов вычислений, выраженных в компьютерных числах и переведенный в математические числа, соответствует первоначально поставленной задаче.

Упомянутые проблемы поставили на повестку дня ряд принципиально новых задач, среди которых отметим такие, как сравнение и выбор программы, которые осуществляют один и тот же алгоритм, выбор различных критериев качества осуществления программой вычислений и их соответствия поставленным задачам.

11.3. Компьютерные числа.

История развития математической методологии — это также история развития понятия числа. Понятие числа — это одно из наиболее распространенных понятий, которыми оперировало, оперирует и будет оперировать человечество. Все содержание этой книги иллюстрирует последнее утверждение. Более того, оно показывает, как смысл понятия числа менялся со временем, с развитием человеческой цивилизации, и как это понятие усложнялось и множилось, благодаря введению дополнительных слов в его имя. Настоящий параграф, которым заканчивается книга, посвящен новому содержанию понятия числа — понятию *компьютерного числа*, которое пришло вместе с мировой интеллектуальной революцией, с возникновением и широким внедрением компьютеров.

Понятие компьютерного числа является ключевым, основным понятием компьютерной математики. По своему широкому использованию оно стало одним из символов мировой революции в математике. Без понимания содержания, заложенного в этом понятии, трудно оценить результаты конкретных числовых расчетов, выполняемых с помощью компьютеров, а также прогнозировать качество полученных решений практических задач.

В неявной форме человечество уже давно знакомо с этим понятием, однако до середины XX века этих чисел просто не замечали, считая их, в определенной степени, «тенью» математических чисел и не видя в них специфических математических объектов. Те, кто занимаются решением задач на компьютерах, повседневно сталкиваются с ними, пытаются бороться с ними, рассматривая их как приближенные значения математических чисел. В качестве примера такой борьбы можно привести содержание книги Р. Грэхема и др. (22).

Для того чтобы дать характеристику компьютерных чисел, необходимо сказать несколько слов о свойствах компьютеров, которые имеют прямое отношение к нашей теме.

Компьютеры, независимо от их реального технического воплощения, обладают общими принципами построения и функционирования, которые поддаются определенной формализации. Мы не будем останавливаться на описании всех этих принципов, как технических, так и математических; для наших целей достаточно выделить несколько принципов, которые, прежде всего, связаны с вычислительной математикой и необходимы для наших дальнейших рассуждений.

Первый принцип заключается в том, что компьютеры обрабатывают только последовательности булевых сигналов (т.е. последовательности, состоящие из нулей и единиц) строго ограниченной длины. Конечно, при определенных ухищрениях можно увеличить длину обрабатываемых последовательностей, однако эта длина всегда остается ограниченной.

Второй принцип заключается в том, что компьютеры могут выполнять только арифметические и логические операции над упомянутыми выше последовательностями.

Третий принцип, который мы уже упоминали в предыдущем параграфе, можно сформулировать в следующем виде: при выполнении любой математической вычислительной процедуры мы имеем дело с тремя различными языками:

— математическим языком, на котором задается вычислительный алгоритм (процедура);

— программным языком, являющимся промежуточным между двумя языками: математическим языком и «естественным» языком компьютера, с помощью которого производятся вычисления; целью использования этого языка является оказание эффективной помощи в переводе с математического языка на язык компьютера вычислительных процедур;

— «естественным» языком компьютера, с помощью которого производятся вычисления.

С этими тремя языками связаны две системы перевода:

— система программирования, которая «переводит» с математического языка на язык компьютерной программы;

— компилирующая система, переводящая с языка программ на язык компьютера.

Таким образом, при решении вычислительной задачи с помощью компьютера мы имеем дело с «двойным» переводом с математического языка на «естественный» язык компьютера. Необходимость такого двойного перевода связана с его удобством и эффективностью. При этом, конечно, возникают различные проблемы, связанные с качеством перевода с одного языка на другой. Нас в дальнейших рассуждениях будет интересовать только одно важное следствие, вытекающее из приведенных принципов.

Очевидным следствием из этих принципов является то, что любой компьютер имеет дело только с числами, запись которых в любой позиционной системе счисления (например, в двоичной или десятичной) состоит из ограниченного количества цифр. Это количество в записи числа может быть достаточно велико, но при выполнении любой программы оно всегда ограничено.

Так как любое число в произвольной позиционной системе представления состоит из целой и дробной части, то целая и дробная части, каждая в отдельности, записывается с помощью строго ограниченного числа позиций. В случае, когда числа задаются в десятичной позиционной системе, упомянутое выше утверждение можно сформулировать следующим образом*: действия в компьютере производятся только над теми числами, которые в своей записи имеют ограниченное число десятичных знаков до и после точки, разделяющей дробную и целую часть числа.*

Для простоты и удобства дальнейших рассуждений будем рассматривать представления чисел только в десятичной системе. Наш выбор обусловлен тем, что несмотря на то, что реальные действия происходят в компьютере над числами в двоичной системе, результаты, как промежуточные, так и окончательные, обычно представляются в десятичной записи.

Важно также отметить, что современные компьютеры часто позволяют представлять полученные в результате вычислений числа с фиксированным выбранным заранее количеством десятичных знаков после запятой. Это фиксированное количество принято называть «точностью вычислений», хотя при более пристальном рассмотрении этот термин может вызвать обоснованные возражения. Ясно, что компьютер оперирует с числами, у которых количество разрядов больше, чем это фиксированное число.

Любой компьютер производит над числами ряд операций, среди которых можно выделить так называемые «арифметические» и «логические» операции. Мы к ним добавим еще одну операцию, которую будем называть «округлением». Обычно эту операцию не выделяют как отдельную, а рассматривают как часть «арифметических» операций.

Уточним определение компьютерного числа, для чего введем следующие обозначения. Обозначим через Q_n множество всех чисел, цифровая запись которых содержит не более n цифр для записи целой части числа и не более n цифр для записи дробной части числа, где n — фиксированное натуральное число. Любое число из множества Q_n будем называть *компьютерным n-числом*. Очевидно, что любое n-число является рациональным числом, но не всякое рациональное число является n-числом.

На множестве Q_n можно определить подобия четырех арифметических действий, используя для этого определения арифметических действий над рациональными числами и операцию округления как промежуточных результатов, так и конечных результатов. Для удобства назовем вводимые операции над n-числами *К-операциями.* Арифметические К-операции определяются над парами n-чисел, а К-операция округления производится над отдельным n-числом.

Пусть нам дана пара n-чисел. Очевидно, что их можно рассматривать как рациональные числа, и поэтому на них определены все арифметические операции. Определим *К-сложение* двух n-чисел как арифметическое сложение рациональных чисел с последующим округлением до фиксированного числа знаков после запятой. Аналогично мы можем определить и остальные К-операции. Так, *К-вычитание* одного n-числа из другого — как вычитание между двумя рациональными числами с последующим округлением до фиксированного числа знаков после запятой; *К-умножение* двух n-чисел – как умножение соответствующих рациональных чисел с последующим округлением до фиксированного числа знаков после запятой; *К-деление* одного n-числа на другое – как деление соответствующих рациональных чисел с последующим округлением до фиксированного числа знаков после запятой. При таких определениях К-операций множество Q_n является замкнутым относительно этих операций, т.е. результат К-операций над n-числами из Q_n является n-числом из Q_n. Для дальнейшего удобства будем считать, что Q_n представляет собой структуру, на которой определены арифметические К-операции и операция округления.

К-операции не обладают свойствами, которые мы привыкли видеть у операций над числами. Так, например, ни одна из этих операций не является ассоциативной операцией, дистрибутивные законы также не имеют места. Другими словами, множество Q_n с определенными на нем К-операциями не является известной математической структурой, т.е. это множество не является полем, кольцом, группой и т.п.

Из последнего заключения вытекают следствия.

Во-первых, не существует взаимно-однозначного соответствия между Q_n и подмножеством рациональных чисел в Q, которое сохраняло бы арифметические операции или К-операции.

Во-вторых, результаты расчетов по одной и той же арифметической формуле в Q_n и Q не являются сопоставимыми. (Формула называется арифметической, если в ней участвуют только арифметические операции или арифметические К-операции. Под сопоставимостью двух чисел понимается некая оценка разности между этими числами.)

В-третьих, математические утверждения, истинные над множеством действительных или рациональных чисел, не имеют места над структурой Q_n. В качестве примера легко можно построить геометрическую прогрессию со знаменателем, меньшим единицы, частичные суммы которой не ограничены, если ее рассматривать над Q_n.

Как видно из сказанного, решение математической задачи с помощью компьютера, в общем случае, может привести к результату, ни в коей мере не связанному с поставленной задачей.

Библиография

1) Аносов Д.Б., Взгляд на математику и нечто из нее. М. 2003

(2) Аристотель, Сочинения в 4-х томах. «Мысль» М. 1976-1981

(3) Аристотель, Метафизика. «Алетейя», С.-Петербург, 2002

(4) Атья М., Математика в XX веке. Математическое просвещение, сер.3, вып.7, 2003, стр.5-24

(5) Белл Э.Т., Творцы математики. М. «Просвещение», 1979.

(6) Блауг М., Экономическая мысль в ретроспективе. М. Дело Лтд. 1994

(7) Бор Н., Атомная физика и человеческое познание. М. ИЛ, 1961

(8) Борн М., Физика в жизни моего поколения. М. «Мир», 1963

(9) Бриллюэн Л., Теория информации и ее приложение к фундаментальным проблемам физики. В сб. Развитие современной физики (1), стр.324-329

(10) Бурбаки Н., Очерки по истории математики. ИЛ. М. 1968

(11) Бэкон Ф., Сочинения. В 2-х тт. М., “Мысль”, 1978, т. 2.

(12) Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука. – М.: Физматгиз, 1959

(13) Вайцзеккер К.Ф., Физика и философия. Вопросы философии. 1993, №1, 115-125

(14) Веблен Т., Теория праздного класса. М. «Прогресс». 1994

(15) Вейль Г. Математическое мышление. «Наука», Москва, 1989

(16) Вигнер Ю., Этюды о симметрии. М. «Мир», 1971

(17) Володарский А.И., Ариабхата. М. «Наука», 1977

(18) Выгодский М.Я., Арифметика и алгебра в древности. М.«Наука», 1967
(19) Галилей Г., Избранные труды. М. «Наука», 1964. т.2.
(20) Гейзенберг В., Шаги за горизонт. М. «Прогресс», 1987
(21) Гильберт Д., Основания геометрии. М.- Л. Гостехиздат, 1948
(22) Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О., Конкретная математика. М. «Мир», 1998
(23) Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж., Пути и лабиринты. М. «Мир», 1986
(24) Декарт Р., Избранные произведения. М.-Л. Политиздат, 1950
(25) Декарт Р., Рассуждение о методе. М. АН СССР, 1953
(26) Депман И.Я., История арифметики. М. «Просвещение». 1965
(27) Диофант Александрийский, Арифметика и Книга о многоугольных числах. М. «Наука», 1974
(28) Дирак П.А.М., Воспоминания о необычайной эпохе. М. «Наука», 1990
(29) Евклид, Начала. Книги I-VI. М.-Л. ГТТИ, 1948
(30) Евклид, Начала. Книги VII-X. М.-Л. ГТТИ, 1949
(31) Евклид, Начала. Книги XI-XIV. М.-Л. ГТТИ, 1950
(32) История математики. Под редакцией А.П.Юшкевича. Т.1-3, М. «Наука», 1970
(33) Кант И., Собрание сочинений в шести томах. М., «Мысль». 1964
(34) Клайн М., Математика. Утрата определенности. М. «Мир»,1984
(35) Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX веке. М.-Л. Гостехиздат, 1937
(36) Кондорсэ Ж.А., Эскиз исторической картины прогресса человеческого разума. М. Гос. соц.- экон. изд. 1936
(37) Кондратьев Н.Д., Избранные сочинения. М. Экономика, 1993
(38) Льоцци М., История физики. М. «Мир», 1970
(39) Лаэртский Диоген, О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов. М. “Мысль”, 1986
(40) Леонтьев В.В., Экономическое эссе. Теории, исследования, факты и политика. М. Политиздат, 1990
(41) Лаплас П.С., Опыт философии теории вероятностей. М.,1908
(42) Липсон Г., Великие эксперименты в физике. М. «Мир», 1972
(43) Миркин Б.Г., Проблема группового выбора. М. «Наука», 1974
(44) Нейгебауэр О., Точные науки в древности. М. «Наука», 1968
(45) Ньютон И., Математические начала натуральной философии. М.-Л. Изд. АН СССР, 1936
(46) Паули В., Физические очерки. М. «Наука». 1975
(47) Планк М., Единство физической картины мира. М., «Наука», 1966
(48) Платон, Сочинения в трех томах. М. «Мысль», 1970
(49) Пойа Г., Сегё Г., Задачи и теоремы из анализа. т.1. М. «Гостехиздат», 1956
(50) Пойа Д., Математика и правдоподобные рассуждения. «Наука». М. 1975
(51) Пуанкаре А., О науке. «Наука». М. 1983.
(52) Развитие современной физики. М. Наука. 1964
(53) Рассел Б., История западной философии. Chalidze Publications, N.Y. 1981
(54) Роббинс Л., Предмет экономической науки. THESIS. Зима 1993, т.1, вып. 1.
(55) Селигмен Б., Основные течения современной экономической мысли. М. «Прогресс», 1968
(56) Сквайрс Дж., Практическая физика. М. «Мир», 1971
(57) Стройк Д.Я., Краткий очерк истории математики. М. «Наука», 1984
(58) Файерабенд Пол, Избранные труды по методологии науки. М. «Наука», 1986
(59) Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М., Фейнмановские лекции по физике, т.1, «Мир», М.1965
(60) Фейнман Р., Характер физических законов. М. «Мир», 1968
(61) Фейнберг Е.Л., Кибернетика, логика, искусство. М. «Радио и связь», 1981
(62) Харди Г., Апология математика. Ижевск. 2000
(63) Чебышев П.Я., Полное собрание сочинений, М.-Л., 1944
(64) Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. «Наука», Москва, 1971.
(65) Шумпетер Й., Теория экономического развития. М. Прогресс, 1982
(66) Эйнштейн А., Физика и реальность. Сб. работ. «Наука», М.1965
(67) Эйнштейн А., Собрание научных трудов, т. IV, М. «Наука», 1967
(68) Энциклопедия кибернетики. Киев, 1975, т. 1-2.

(69) Ядгаров Я.С., История экономических учений. М. «Экономика», 1996